On the completeness of the calculus of logic (*1929*)

1. Introduction

The main object of the following investigations is the proof of the completeness of the axiom system for what is called the restricted functional calculus, namely the system given in *Whitehead and Russell 1910*, Part I, *1 and *10, and, in a similar way, in *Hilbert and Ackermann 1928* (hereafter cited as H. A.), III, §5. Here 'completeness' is to mean that every valid formula expressible in the restricted functional calculus (a valid *Zählaussage*, as Löwenheim would say) can be derived from the axioms by means of a finite sequence of formal inferences. This assertion can easily be seen to be equivalent to the following: Every consistent axiom system[1] consisting of only *Zählaussagen* has a realization. (Here 'consistent' means that no contradiction can be derived by means of finitely many formal inferences.) The latter formulation seems also to be of some interest in itself, since the solution of this question represents in a certain sense a theoretical completion of the usual method for proving consistency (only, of course, for the special kind of axiom systems considered here); for it would give us a guarantee that in every case this method leads to its goal, that is, that one must either be able to produce a contradiction or prove the consistency by means of a model.[2] L. E. Brouwer, in particular, has emphatically stressed that from the consistency of an axiom system we cannot conclude without further ado that a model can be constructed. But one might perhaps think that the existence of the notions introduced through an axiom system is to be defined outright by the consistency of the axioms and that, therefore, a proof has to be rejected out of hand. This definition (if only we impose the self-evident requirement that the notion of existence thus introduced obeys the same operation rules as does the elementary one), however, manifestly presupposes the axiom that every mathematical problem is solvable. Or, more precisely, it presupposes that we cannot prove the unsolvability of any problem. For, if the unsolvability of some problem (in the domain of real numbers, say) were proved, then, from the definition above, there

[1] A detailed definition is given in a subsequent section.

[2] To be sure, the existence of this alternative is not proved in the intuitionistic sense (that is, through a decision procedure); see below.

nicht isomorpher Realisierungen des Axiomensystems der reellen Zahlen folgen, während man anderseits die Isomorphie je zweier Realisierungen beweisen kann. Nun ist aber ein Beweis der Unlösbarkeit eines Problems durchaus nicht von vorneherein auszuschließen, wenn man bedenkt, daß es sich dabei nur um Unlösbarkeit mit gewissen *genau anzugebenden formalen* Schlußweisen handelt. Denn alle hier in Betracht kommenden Begriffe (beweisbar, widerspruchslos etc.) haben ja nur dann einen exakten Sinn, wenn man die zugelassenen Schlußweisen genau abgrenzt. Diese Überlegungen beanspruchen übrigens nur, die Schwierigkeiten, welche mit einer solchen Definition des Existenzbegriffes verbunden wären, ins rechte Licht zu setzen, ohne über ihre Möglichkeit oder Unmöglichkeit endgiltig etwas zu behaupten.

Ersetzt man den Begriff des logischen Folgens (formal beweisbar in endlich vielen Schritten) durch Implikation im Russellschen Sinn, genauer durch *formale* Implikation, wobei die Variabeln die Grundbegriffe des betreffenden Axiomensystems sind, so folgt die Existenz eines Modells für ein widerspruchsfreies (d. h. jetzt, keinen Widerspruch *implizierendes*) Axiomensystem aus der Tatsache, daß eine falsche Aussage jede andere, also auch jeden Widerspruch impliziert (daraus folgt indirekt sofort die Behauptung).[3]

Zum Schluß noch eine Bemerkung über die in der folgenden Arbeit angewandten *Beweismittel*. In diesen sind keinerlei Beschränkungen gemacht worden. Insbesondere wird vom Satz vom ausgeschlossenen Dritten für unendliche Gesamtheiten wesentlich Gebrauch gemacht (das Überabzählbare wird hingegen im Hauptbeweis nicht verwendet). Es hat vielleicht den Anschein, daß dadurch der ganze Vollständigkeitsbeweis wertlos wird. Denn was bewiesen werden soll, kann ja als eine Art Entscheidbarkeit aufgefaßt werden (jeder Ausdruck des engeren Funktionenkalküls kann entweder durch endlich viele Schlüsse als allgemein giltig erkannt oder seine Allgemeingiltigkeit durch ein Gegenbeispiel widerlegt werden). Anderseits scheint der Satz vom ausgeschlossenen Dritten nichts anderes auszusagen als die Entscheidbarkeit jedes Problems. Doch ist dagegen Folgendes einzuwenden:

1.) Wird der Satz vom ausgeschlossenen Dritten nur von intuitionistischer Seite so interpretiert.

2.) Wird, selbst wenn man diese Interpretation annimmt, damit keineswegs die Lösbarkeit mit *bestimmten* Hilfsmitteln sondern nur mit allen

[3]Das scheint zuerst R. Carnap in einer noch unveröffentlichten Arbeit bemerkt zu haben, die er so freundlich war, mir im Manuskript zur Verfügung zu stellen.

would follow the existence of two non-isomorphic realizations of the axiom system for the real numbers, while on the other hand we can prove the isomorphism of any two realizations. We cannot at all exclude out of hand, however, a proof of the unsolvability of a problem if we observe that what is at issue here is only unsolvability by certain *precisely stated formal* means of inference. For, all the notions that are considered here (provable, consistent, and so on) have an exact meaning only when we have precisely delimited the means of inference that are admitted. These reflections, incidentally, are intended only to properly illuminate the difficulties that would be connected with such a definition of the notion of existence, without any definitive assertion being made about its possibility or impossibility.

If we replace the notion of logical consequence (that is, of being formally provable in finitely many steps) by implication in Russell's sense, more precisely, by *formal* implication, where the ⟦functional⟧ variables are the primitive notions of the axiom system in question, then the existence of a model for a consistent axiom system (now taken to mean one that *implies* no contradiction) follows from the fact that a false proposition implies any other, hence also every contradiction (whence the assertion follows at once by indirect argument).[3]

In conclusion, let me make a remark about the *means of proof* used in what follows. Concerning them, no restriction whatsoever has been made. In particular, essential use is made of the principle of the excluded middle for infinite collections (the nondenumerable infinite, however, is not used in the main proof). It might perhaps appear that this would invalidate the entire completeness proof. For what is to be proved can, after all, be viewed as a kind of decidability (every expression of the restricted functional calculus either can be recognized as valid through finitely many inferences or its validity can be refuted by a counterexample). On the other hand, the principle of the excluded middle seems to express nothing other than the decidability of every problem. To this, however, the following objections can be made:

(1) The principle of the excluded middle is interpreted this way only by those of the intuitionistic persuasion;

(2) Even if we accept this interpretation, what is affirmed is the solvability not at all through specified means but only through all means that are

[3]This seems to have been noted for the first time by R. Carnap in a hitherto unpublished work, which he was kind enough to put at my disposal in a manuscript form.

überhaupt erdenklichen Hilfsmitteln behauptet,[4] während in der folgenden Arbeit gerade bewiesen wird, daß jeder allgemein giltige Ausdruck sich mit ganz *bestimmten konkret aufgezählten* Schlußregeln deduzieren lasse. Vom intuitionistischen Standpunkt aus würde das ganze Problem überhaupt ein anderes werden, weil schon der Sinn der Aussage: "Ein Relationensystem *erfüllt* einen logischen Ausdruck" (d. h. der durch Einsetzung entstehende Satz ist wahr) ein fundamental anderer wäre. Denn man müßte ja verlangen, daß die in dem Ausdruck vorkommenden Existenzialbehauptungen konstruktiv bewiesen wären. Ferner ist klar, daß ein intuitionistischer Vollständigkeitsbeweis (als Alternative: beweisbar—durch Gegenbeispiele widerlegbar) nur durch Lösung des Entscheidungsproblems der mathematischen Logik geführt werden könnte, während im Folgenden nur eine Transformation dieses Problems, nämlich seine Zurückführung auf die Frage, welche Formeln formal beweisbar sind, beabsichtigt wird. Schließlich ist auch noch zu bedenken, daß das hier behandelte Problem ja nicht erst durch den Grundlagenstreit aufgetaucht ist (wie etwa das Problem der Widerspruchslosigkeit der Mathematik), sondern, auch wenn die inhaltliche Geltung der "naiven" Mathematik niemals angezweifelt worden wäre, *innerhalb* dieser sinnvoll gestellt werden könnte (im Gegensatz z. B. zum Problem der Widerspruchslosigkeit), weshalb eine Einschränkung der Beweismittel nicht dringender zu sein scheint als bei irgend einem anderen mathematischen Problem. Soviel über den Hauptgegenstand der Arbeit.

Als Nebenuntersuchungen werden noch folgende durchgeführt werden:

1.) Wird der Vollständigkeitsbeweis auf den Fall ausgedehnt, daß man Identität als logischen Grundbegriff hinzunimmt.

2.) Wird die Frage der gegenseitigen Unabhängigkeit der Axiome für das zugrundegelegte logische Axiomensystem behandelt.

3.) Wird der Vollständigkeitssatz (jede allgemeingiltige Formel ist beweisbar) auf abzählbare Systeme von Formeln ausgedehnt.

2. Vorbereitende Bemerkungen über das zugrundegelegte logische Axiomensystem und die verwendete Terminologie

Bevor wir zum eigentlichen Thema übergehen, soll einiges über das zugrundegelegte logische Axiomensystem und die angewandten Bezeichnungen gesagt werden. Wir schließen uns dabei im wesentlichen an H.

[4] Ob allerdings ein so allgemeiner Lösbarkeitsbegriff und damit die in Rede stehende Interpretation vom Satz des ausgeschlossenen Dritten überhaupt einen Sinn hat, erscheint fraglich.

in any way imaginable,[4] while what is shown below is precisely that every valid expression can be derived through completely *specified, concretely enumerated* inference rules. From the intuitionistic point of view, the entire problem would be a different one, because already the meaning of the statement 'A system of relations *satisfies* a logical expression' (that is, the sentence obtained through substitution is true) would be a fundamentally different one. For we would then have to require that the existential assertions occurring in the expression be constructively proved. It is clear, moreover, that an intuitionistic completeness proof (with the alternative: provable or refutable by counterexamples) could be carried out only through the solution of the decision problem for mathematical logic, while in what follows only a transformation of that problem, namely its reduction to the question which formulas are formally provable, is intended. Finally, we must also consider that it was not the controversy regarding the foundations of mathematics that caused the problem treated here to surface (as was the case, for example, for the problem of the consistency of mathematics); rather, even if it had never been questioned that 'naive' mathematics is correct as to its content, this problem could have been meaningfully posed within this naive mathematics (unlike, for example, the problem of consistency), which is why a restriction on the means of proof does not seem to be more pressing here than for any other mathematical problem. So much for the principal topic of the present work.

The following collateral investigations will be conducted:

(1) The completeness proof will be extended to the case in which identity is added as a fundamental logical notion;

(2) The question of the mutual independence of the axioms will be treated for the logical axiom system adopted;

(3) The completeness theorem (every valid formula is provable) will be extended to denumerable systems of formulas.

2. Preliminary remarks on the logical axiom system adopted and the terminology used

Before we proceed to the subject proper, we must say a few words about the logical axiom system adopted and the notation used. Here we essentially follow H. A. The object of the investigation will be certain combina-

[4]It seems questionable, however, whether a notion of solvability that is so sweeping—and, consequently, the interpretation of the principle of the excluded middle that is at issue here—makes any sense at all.

A. an. Den Gegenstand der Untersuchung bilden gewisse Zeichenkombinationen (*logische Ausdrücke*). Diese bauen sich aus den Grundzeichen (*Gegenstandsvariable, Funktionsvariable*,[5] Aussagevariable, das Zeichen für oder $\vee$, Negation $\overline{}$, alle (x)) in der H. A., III, § 4 angegebenen Weise auf. Wir setzen voraus, daß uns für jede Variablenart abzählbar viele Zeichen zur Verfügung stehen. Es werden auch Ausdrücke, in denen das Zeichen $=$ (in der Verwendungsweise $x = y$; x, y Individuenvariable) vorkommt, betrachtet werden. Sollen diese mitumfaßt werden, so wird das immer durch den Zusatz "im weiteren Sinn" (i. w. S.) angedeutet werden, entsprechend "im engeren Sinn" (i. e. S.). Ferner denken wir uns die Zeichen $\&$, $\rightarrow$, $\sim$, (E), in der üblichen Weise lediglich als *Abkürzungen* eingeführt. Das zugrunde gelegte logische Axiomensystem ist (im wesentlichen) das Russell'sche. D. h.: Folgende Ausdrücke sollen logische *Axiome* heißen:

1.) $X \vee X \rightarrow X$,
2.) $X \rightarrow X \vee Y$,
3.) $X \vee Y \rightarrow Y \vee X$,
4.) $(X \rightarrow Y) \rightarrow (Z \vee X \rightarrow Z \vee Y)$,
5.) $(x)F(x) \rightarrow F(y)$,
6.) $(x)[X \vee F(x)] \rightarrow X \vee (x)F(x)$.

Unter *Axiomen* i. w. S. sollen 1 bis 6, sowie

7.) $x = x$,
8.) $x = y \rightarrow [F(x) \rightarrow F(y)]$.[6]

Als Schlußregeln gelten die folgenden:

1.) Das Schlußschema.
2.) Die Einsetzungsregel für Aussage- und Funktionsvariable.
3.) Aus $A(x)$ darf $(x)A(x)$ geschlossen werden.
4.) Individuenvariable (freie oder gebundene) dürfen beliebig anders bezeichnet werden.[7]

Aus den Schlußregeln ergibt sich der Sinn von: "*beweisbar*" und "*widerlegbar*" (A ist widerlegbar soll bedeuten $\overline{A}$ ist beweisbar). Ein Ausdruck, in dem sämtliche Präfixe am Anfang stehen, soll "*Normalausdruck*" heißen. Ein Ausdruck, der keine anderen als Aussagevariable enthält, "*Aussageformel*". Die bisher eingeführten Begriffe haben das Gemeinsame, daß sie sich lediglich auf die Zeichen als räumliche Figuren beziehen. Ihnen stehen gegenüber solche, bei denen auf die *Bedeutung* der Formeln Bezug genommen wird. Sei A irgend ein logischer Ausdruck, der die Funktionsvariabeln $F_1, F_2, \ldots, F_k$, die freien Individuenvariabeln $x_1, x_2, \ldots, x_l$ und die Aussagevariabeln $X_1, X_2, \ldots, X_m$ und sonst nur gebundene Variable

[5] Die verschiedenstelligen Relationen sollen, wenn es die Deutlichkeit fordert, durch obere Indizes unterschieden werden.

[6] Die andern bisher aufgestellten Axiomensysteme (Frege, Bernays) unterscheiden sich vom Russellschen nur unwesentlich, so daß sich der Vollständigkeitsbeweis sofort auf sie überträgt.

[7] Bei 2.) und 4.) müssen gewisse Kautelen hinzugefügt werden, siehe H. A., III, § 5.

tions of signs (*logical expressions*). These are constructed from the primitive signs (*individual variables, functional variables*,[5] propositional variables, the signs $\vee$ for 'or', $\overline{}$ for negation, (x) for 'all') in the manner given in H. A., III, §4. We assume that we have at our disposal denumerably many signs for each kind of variable. We shall also consider expressions in which the sign $=$ (as used in '$x = y$', x and y being individual variables) occurs. Whenever such expressions are permitted, this will always be indicated by the addition 'in the extended sense' (i. t. e. s.), as opposed to 'in the restricted sense' (i. t. r. s.). Further, we consider that the signs &, $\rightarrow$, $\sim$, (E) have been introduced in the usual way, purely as *abbreviations*. The logical axiom system adopted is (essentially) that of Russell. That is, the following expressions are to be called logical *axioms*:

(1)	$X \vee X \rightarrow X$,	(4)	$(X \rightarrow Y) \rightarrow (Z \vee X \rightarrow Z \vee Y)$,
(2)	$X \rightarrow X \vee Y$,	(5)	$(x)F(x) \rightarrow F(y)$,
(3)	$X \vee Y \rightarrow Y \vee X$,	(6)	$(x)[X \vee F(x)] \rightarrow X \vee (x)F(x)$.

The *axioms* i. t. e. s. are (1) through (6), as well as

(7)	$x = x$,	(8)	$x = y \rightarrow [F(x) \rightarrow F(y)]$.[6]

The rules of inference shall be the following:

(1) The inference schema ⟦that is, the rule of detachment⟧;
(2) The rule of substitution for propositional and functional variables;
(3) From $A(x)$, to infer $(x)A(x)$;
(4) (Free or bound) individual variables can be changed at will.[7]

The rules of inference yield the meaning of '*provable*' and '*refutable*' ('A is refutable' shall mean that $\overline{A}$ is provable). An expression in which all the quantifiers occur at the beginning ⟦and in which their scope is the entire formula⟧ is said to be a *normal expression*. An expression that contains no variables other than propositional variables is said to be a *propositional formula*. What the notions thus far introduced have in common is that, in the relation they bear to signs, these enter purely as figures in space. In contrast, there are those notions that depend upon the *meaning* of the formulas. Let A be any logical expression that contains the functional variables $F_1, F_2, \ldots, F_k$, the free individual variables $x_1, x_2, \ldots, x_l$, the propositional variables $X_1, X_2, \ldots, X_m$, and, otherwise, only bound variables. Let S be a system of functions, $f_1, f_2, \ldots, f_k$ (all defined in

[5] When clarity requires it, many-place relations are to be distinguished by superscripts.

[6] The other axiom systems set up thus far (Frege, Bernays) differ from Russell's only in inessential points, so that the completeness proof can immediately be carried over to these systems.

[7] In (2) and (4) certain provisos have to be added; see H. A., III, §5.

enthält. Wir sagen von einem System (sämtlich in demselben Denkbereich[8] definierter) Funktionen, $f_1, f_2, \ldots, f_k$, und (ebenfalls demselben Denkbereich angehörenden) Individuen, $a_1, a_2, \ldots, a_l$, sowie Aussagen, A_1, $A_2, \ldots, A_m$ —von diesem System

$$S = (f_1, f_2, \ldots, f_k;\ a_1, a_2, \ldots, a_l;\ A_1, A_2, \ldots, A_m)$$

sagen wir, daß es den logischen Ausdruck *erfülle*, wenn es in denselben eingesetzt einen (in dem betreffenden Denkbereich) wahren Satz ergibt.[9] Daraus ergibt sich ohneweiters, was unter *erfüllbar in einem bestimmten Denkbereich*, *erfüllbar* schlechthin (= es gibt einen Denkbereich, in dem der Ausdruck erfüllbar ist), allgemein giltig in einem bestimmten Denkbereich (= Negation nicht erfüllbar), *allgemein giltig* schlechthin verstanden werden soll.

Zur Behandlung axiomatischer Fragen sind noch einige weitere Bezeichnungen erforderlich (sie werden in der folgenden Arbeit erst von Nr. 8 an verwendet). Wir erweitern die Grundzeichen durch eine abzählbare Reihe von *Individuenkonstanten* (*Namen*) $a, b, c, \ldots$ und ebenso von *Funktionskonstanten* (*Begriffszeichen*) $f, g, h, \ldots$. Unter einem *Ausdruck* (i. e. S. und i. w. S.) soll eine mit Hilfe der bisher eingeführten Grundzeichen in bekannter Weise aufgebaute Zeichenverbindung verstanden werden. Den einen Extremfall der Ausdrücke bilden die logischen (in denen keine Konstante vorkommen, s. o.), den anderen die *Zählausdrücke* (= Ausdrücke *ohne* Funktions- und Aussagevariable, in denen sämtliche Individuenvariable gebunden sind). *Zählaxiomensystem* soll ein (endliches oder unendliches) System von Zählausdrücken heißen.[10] *Sinnvoll* für ein solches soll ein Zählausdruck heißen, in dem keine anderen Funktions- und Individualkonstanten vorkommen als in dem Axiomensystem selbst. Aus einem bestimmten Axiomensystem *deduzierbar* soll ein Ausdruck heißen, wenn er aus den logischen Axiomen *und* den das Axiomensystem konstituierenden Aussagen formal hergeleitet werden kann. Ohneweiters ist dann klar, was unter *widerspruchslos, Erfüllung* (*Realisierung*), *erfüllbar* etc., zu verstehen ist. Die meisten hier angeführten Begriffe zerfallen in solche i. w. S. und i. e. S., je nachdem ob Identität als Grundbegriff zugelassen wird oder nicht.

[8]Denkbereich soll stets heissen *nicht leerer* Denkbereich (sonst gilt ja Axiom 5 nicht).

[9]Man muß natürlich eine Konvention darüber treffen, in welcher Reihenfolge die f, a, A in den Ausdruck eingesetzt werden sollen.

[10]Als Beispiel kann etwa das Hilbertsche Axiomensystem der Geometrie ohne die Stetigkeitsaxiome genommen werden.

the same universal domain[8]), and of individuals (belonging to the same domain), $a_1, a_2, \dots, a_l$, as well as propositional constants, $A_1, A_2, \dots, A_m$. We say that this system, namely

$$(f_1, f_2, \dots, f_k;\ a_1, a_2, \dots, a_l;\ A_1, A_2, \dots, A_m),$$

satisfies the logical expression if it yields a proposition that is true (in the domain in question) when it is substituted in the expression.[9] From this we see at once what we must understand by *satisfiable in a certain domain*, by *satisfiable* alone (there is a domain in which the expression is satisfiable), by *valid in a certain domain* (the negation is not satisfiable), and by *valid* alone.

In order to deal with axiomatic questions, we require some additional notational conventions (in the present work these will be used only from Section 8 onward). To the primitive signs we adjoin a denumerable sequence of *individual constants* (*names*), a, b, $c, \dots$, and one of *functional constants* (*signs for notions*), f, g, $h, \dots$. By an *expression* (i. t. r. s. and i. t. e. s.) we are to understand a sign sequence constructed in the well-known manner by means of the primitive signs introduced thus far. At one extreme, we have the logical expressions (in which no constants occur—see above); at the other, we have the applied expressions (that is, expressions *without* functional or propositional variables, in which all individual variables are bound). A (finite or infinite) system of applied expressions is an *applied axiom system*.[10] An applied expression in which no functional or individual constant occurs other than those in the axiom system is said to be *meaningful* for the system. An expression is said to be *derivable* from a given axiom system if it can be formally derived from the logical axioms *and* the propositions constituting the axiom system. Then, what is to be understood by *consistent*, *satisfaction* (*realization*), *satisfiable*, and so on, is immediately clear. Most notions introduced here can be taken i. t. e. s. or i. t. r. s., according as identity is taken as a basic notion or not.

[8]The universal domain must always be understood as being *non-empty* (otherwise Axiom 5 does not hold).

[9]We must, of course, make a stipulation on the order in which the f, a, A are to be substituted in the expression.

[10]Hilbert's axiom system for geometry, without the continuity axioms, can perhaps be taken as an example.

3. Zusammenstellung der im Folgenden verwendeten Sätze aus dem Funktionenkalkül

Zum Beweise des Vollständigkeitssatzes wird eine Reihe von Tatsachen aus dem Funktionenkalkül (i. e. S.) verwendet, die zum Teil schon in H. A. bewiesen sind und die hier kurz zusammengestellt seien (bez. der Beweise kann auf Hilbert–Ackermann verwiesen werden, da das dort verwendete Axiomensystem sich ohneweiters aus dem Russellschen ergibt):

1.) Jede Aussageformel ist entweder widerlegbar oder erfüllbar (denn das System der Axiome 1 bis 4 ist ja vollständig sogar im schärferen Sinn—H. A., I, § 13).

2.) Die Einsetzungsregel—H. A., III, § 7: Ist $A \sim A'$ beweisbar und geht B' aus B hervor, indem man in B A durch A' ersetzt (sei es an allen, sei es nur an einigen Stellen), so ist $B \sim B'$ beweisbar.

3.) Zu jedem logischen Ausdruck A gibt es einen Normalausdruck N, so daß $A \sim N$ eine beweisbare Formel ist—H. A., III, § 8.

4.) Jeder Ausdruck der Form

$$(Ex_1)(Ex_2)\dots(Ex_n)A(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

läßt sich als äquivalent beweisen mit jedem anderen, in dem die (Ex)-Präfixe irgendwie permutiert sind.[11]

5.) Sei F ein Ausdruck, der die freien Variabeln $x_1, x_2, \dots, x_n$, G einer, der die freien Variabeln $y_1, y_2, \dots, y_m$ enthält, ferner soll kein x in G und kein y in F vorkommen (frei oder gebunden). Bedeutet dann (p_i) eines der Präfixe (x_i) oder (Ex_i), ebenso (q_i) eines der Präfixe (y_i) oder (Ey_i), dann ist jeder Ausdruck der Form

$$(p_1)\dots(p_n)F(x_1, x_2, \dots, x_n) \,\&\, (q_1)\dots(q_m)G(y_1, y_2, \dots, y_m)$$

als äquivalent beweisbar[12] mit jedem Ausdruck der Form

$$(P)[F(x_1, x_2, \dots, x_n) \,\&\, G(y_1, y_2, \dots, y_m)],$$

wobei das Präfix P aus allen p_i und allen q_i zusammengesetzt ist, die Reihenfolge der p_i untereinander und der q_i untereinander beibehalten, dagegen die Reihenfolge der p_i gegenüber den q_i ganz willkürlich festgesetzt wird. Der Beweis ergibt sich leicht durch mehrmalige Anwendung der

[11]Der Beweis ergibt sich durch mehrmalige Anwendung des entsprechenden Satzes für zwei Variable.

[12]A ist als äquivalent beweisbar mit B, soll immer heißen: Die Formel $A \sim B$ ist beweisbar.

3. Summary of the theorems, from the functional calculus, that will be used further on

In the proof of the completeness theorem we shall use a number of facts taken from the functional calculus (i. t. r. s.); they are in part already proved in H. A. and we give them here in a brief summary (for the proofs, we can refer the reader to H. A., since the axiom system used there results immediately from Russell's system):

(1) Every propositional formula is either refutable or satisfiable (the system consisting of Axioms 1–4 is complete even in the stricter sense; see H. A., I, §13).

(2) The replacement rule of H. A., III, §7: If $A \sim A'$ is provable and B' is obtained from B when, in B, A is replaced by A' (whether at all or only at some occurrences), then $B \sim B'$ is provable.

(3) For every logical expression A there is a normal expression N such that $A \sim N$ is a provable formula (H. A., III, §8).

(4) Every expression of the form

$$(Ex_1)(Ex_2)\dots(Ex_n)A(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

can be proved to be equivalent to any other in which the existential quantifiers are arbitrarily permuted.[11]

(5) Let F be an expression containing the free variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, and G be an expression containing the free variables $y_1, y_2, \dots, y_m$; moreover, no x_i is to occur in G and no y_i in F (whether free or bound). If (p_i) is one of the quantifiers (x_i) or (Ex_i), and (q_i) one of the quantifiers (y_i) or (Ey_i), then every expression of the form

$$(p_1)\dots(p_n)F(x_1, x_2, \dots, x_n) \,\&\, (q_1)\dots(q_m)G(y_1, y_2, \dots, y_m)$$

is provably equivalent[12] to every expression of the form

$$(P)[F(x_1, x_2, \dots, x_n) \,\&\, G(y_1, y_2, \dots, y_m)],$$

where the prefix P is built up from all the (p_i) and all the (q_i), the relative order of the (p_i) among themselves and the relative order of the (q_i) among themselves are preserved, but the relative order of the (p_i) with respect to

[11] This is proved by repeated application of the corresponding theorem for two variables.

[12] That A is provably equivalent to B is always to mean: The formula $A \sim B$ is provable.

Formeln

$$A \mathbin{\&} (x)F(x) \sim (x)[A \mathbin{\&} F(x)]$$

(entsprechend für E), im Verein mit der Einsetzungsregel, indem man den Wirkungsbereich der Präfixe p_i, q_i von außen beginnend sukzessive über den ganzen Ausdruck erweitert. Dabei hat man bei jedem Schritt die Wahl zwischen einem p_i und einem q_i, wodurch es möglich wird, alle oben umgrenzten Reihenfolgen in P zu erhalten.

6.) Als für unsere Zwecke besonders wichtig erweist sich schließlich folgender Satz: Alle Formeln der Gestalt

$$\begin{aligned}&(x_1)(x_2)\dots(x_n)F(x_1,x_2,\dots,x_n)\\ &\qquad \mathbin{\&} (Ex_1)(Ex_2)\dots(Ex_n)G(x_1,x_2,\dots,x_n) \rightarrow\\ &\qquad (Ex_1)(Ex_2)\dots(Ex_n)[F(x_1,x_2,\dots,x_n) \mathbin{\&} G(x_1,x_2,\dots,x_n)]\end{aligned}$$

sind beweisbar.

Da der Beweis für $n > 1$ vollkommen analog verläuft, genügt es, ihn für $n = 1$ zu führen.

$$(x)F(x) \rightarrow F(x) \qquad \text{(Axiom 5)}$$

$$F(x) \rightarrow [G(x) \rightarrow F(x) \mathbin{\&} G(x)],$$

also

$$(x)F(x) \rightarrow [G(x) \rightarrow F(x) \mathbin{\&} G(x)]$$

$$(x)F(x) \rightarrow (x)[G(x) \rightarrow F(x) \mathbin{\&} G(x)]$$

(Axiom 6 und Regel 3)

$$(x)[G(x) \rightarrow F(x) \mathbin{\&} G(x)] \rightarrow \{(Ex)G(x) \rightarrow (Ex)[F(x) \mathbin{\&} G(x)]\}$$

(H. A., Formel 34).

Aus den beiden letzten Formeln folgt

$$(x)F(x) \rightarrow \{(Ex)G(x) \rightarrow (Ex)[F(x) \mathbin{\&} G(x)]\},$$

was nur eine andere Schreibweise für die zu beweisende Formel ist.

4. Reduktion des Vollständigkeitssatzes auf den entsprechenden Satz für Formeln ersten Grades

Da die logischen Axiome allgemein giltig und die Schlußregeln inhaltlich richtig sind, so ist es klar, daß jede beweisbare Formel allgemein giltig ist. Der jetzt zu beweisende Vollständigkeitssatz behauptet die Umkehrung: *Jeder allgemeingiltige logische Ausdruck ist beweisbar.* Das kann offenbar auch so ausgesprochen werden: *Jeder logische Ausdruck ist entweder* the (q_i) is set in a completely arbitrary way. The proof is readily obtained by repeated use of the formula

$$A \,\&\, (x)F(x) \sim (x)[A \,\&\, F(x)]$$

and of a similar one for the existential quantifier, together with the replacement rule, so that, beginning from the outside, one successively extends the scope of the quantifiers (p_i) and (q_i) to the whole expression. Here we have, at every step, the choice between a (p_i) and a (q_i), and we are thus able to obtain in P all the sequences allowed above.

(6) Finally, the following theorem is particularly important for our purpose: All formulas of the form

$$\begin{aligned}&(x_1)(x_2)\ldots(x_n)F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\\ &\qquad \& \,(Ex_1)(Ex_2)\ldots(Ex_n)G(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to\\ &\qquad (Ex_1)(Ex_2)\ldots(Ex_n)[F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, G(x_1, x_2, \ldots, x_n)]\end{aligned}$$

are provable.

Since the proof is completely similar for $n > 1$, it suffices to give it for $n = 1$:

$$(x)F(x) \to F(x) \qquad \text{(Axiom 5)}$$

$$F(x) \to [G(x) \to F(x) \,\&\, G(x)],$$

hence

$$(x)F(x) \to [G(x) \to F(x) \,\&\, G(x)]$$

$$(x)F(x) \to (x)[G(x) \to F(x) \,\&\, G(x)]$$

(Axiom 6 and Rule 3)

$$(x)[G(x) \to F(x) \,\&\, G(x)] \to \{(Ex)G(x) \to (Ex)[F(x) \,\&\, G(x)]\}$$

(H. A., Formula 34).

From the last two formulas there follows

$$(x)F(x) \to \{(Ex)G(x) \to (Ex)[F(x) \,\&\, G(x)]\},$$

which is just another way of writing the formula to be proved.

4. Reduction of the completeness theorem to the corresponding theorem for formulas of degree 1

Since the logical axioms are valid and the rules of inference are correct in that they preserve truth, it is clear that every provable formula is valid. The completeness theorem that we must now prove states the converse: *Every* *erfüllbar oder widerlegbar*, und in dieser Form soll es bewiesen werden. Der Beweis wird zunächst nur für logische Ausdrücke i. e. S. geführt und vollzieht sich so, daß der zu beweisende Satz schrittweise auf einfachere zurückgeführt wird. Zunächst ist klar, daß man sich auf Normalausdrücke beschränken kann, da ja (nach 3. Abschnitt, Satz 3) jeder logische Ausdruck A mit einem Normalausdruck N als äquivalent beweisbar ist. Ist also N widerlegbar, dann auch A; ist N erfüllbar, dann auch A (weil ja jede beweisbare Äquivalenz auch allgemein giltig ist). Ist also jeder Normalausdruck entweder widerlegbar oder erfüllbar, dann gilt dasselbe von *jedem* logischen Ausdruck. Man kann weiter voraussetzen, daß der fragliche Ausdruck keine freien Individuenvariabeln enthält. Denn enthält A etwa die freien Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_k$, dann enthält

$$(Ex_1)(Ex_2)\ldots(Ex_k)A(x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

keine freien Variabeln mehr und ist *gleichzeitig* mit A sowohl erfüllbar (nach obiger Definition des Erfülltseins) als auch widerlegbar. Das letztere, weil aus

$$\overline{(Ex_1)(Ex_2)\ldots(Ex_k)}A$$

$(x_1)(x_2)\ldots(x_k)\overline{A}$ und daraus nach Axiom 5 $\overline{A}$ beweisbar ist. Man kann weiter annehmen, daß das Präfix des fraglichen Ausdrucks (ein solches muß ja vorhanden sein, wenn es sich nicht etwa um eine Aussageformel handelt) mit einem Allzeichen beginnt und einem E-Zeichen endet, denn sollte das etwa in $(P)A$ nicht der Fall sein, so genügt es, statt dessen

$$(x)(P)\{A \mathbin{\&} [F(x) \vee \overline{F(x)}]\}$$

bezw.

$$(P)(Ex)\{A \mathbin{\&} [F(x) \vee \overline{F(x)}]\}^{13}$$

zu betrachten, welche offenbar mit $(P)A$ als äquivalent beweisbar[14] und daher mit ihm *zugleich* erfüllbar oder widerlegbar sind.

Die jetzt noch in Betracht kommenden Ausdrücke sind von der Gestalt

$$\begin{array}{l}(x_{1,1})(x_{1,2})\ldots(x_{1,r_1})(Ey_{1,1})(Ey_{1,2})\ldots(Ey_{1,s_1})\\ (x_{2,1})(x_{2,2})\ldots(x_{2,r_2})(Ey_{2,1})(Ey_{2,2})\ldots(Ey_{2,s_2})\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (x_{k,1})(x_{k,2})\ldots(x_{k,r_k})(Ey_{k,1})(Ey_{k,2})\ldots(Ey_{k,s_k})A(x_{l_m}, y_{l_m}).\end{array}$$

k, d. h. die Anzahl der durch E-Zeichen von einander getrennten Komplexe von Allzeichen wird für den Augenblick der *Grad* des Ausdruckes genannt.

[13] x bedeutet dabei eine nicht in $(P)A$ vorkommende Individuenvariable.

[14] Nach 3. Abschnitt, Satz 5.

valid logical expression is provable. Clearly, this can also be expressed thus: *Every logical expression is either satisfiable or refutable*, and we shall prove it in this form. The proof will be given first only for logical expressions i. t. r. s. and will be carried out by the stepwise reduction of the theorem to simpler ones. First, it is clear that we can confine ourselves to normal expressions, since, by Theorem 3 of Section 3, every logical expression A is provably equivalent to a normal expression N. Hence, if N is refutable, so is A; if N is satisfiable, so is A (since every provable equivalence is valid). Hence, if every normal expression is either refutable or satisfiable, then so is *every* logical expression. Moreover, we can assume that the expression in question contains no free individual variables. For, if A contains, say, the free variables $x_1, x_2, \ldots, x_k$, then

$$(Ex_1)(Ex_2)\ldots(Ex_k)A(x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

no longer contains any free variables and is satisfiable (by the definition of satisfiability given above) or refutable *according as* A is. It is refutable if A is because, from

$$\overline{(Ex_1)(Ex_2)\ldots(Ex_k)A},$$

$(x_1)(x_2)\ldots(x_k)\overline{A}$ is provable and, by Axiom 5, so is $\overline{A}$. We can further assume that the prefix of the expression in question (and, unless we are dealing with a sentential formula, there must be such a prefix) begins with a universal quantifier and ends with an existential quantifier; for, if that were not the case in $(P)A$, it would suffice to consider

$$(x)(P)\{A \,\&\, [F(x) \vee \overline{F(x)}]\}$$

or

$$(P)(Ex)\{A \,\&\, [F(x) \vee \overline{F(x)}]\}$$

instead,[13] these two formulas clearly being provably equivalent[14] to $(P)A$ and therefore being satisfiable or refutable *according as* $(P)A$ is.

The expressions that we must still consider are of the form

$$\begin{array}{l}(x_{1,1})(x_{1,2})\ldots(x_{1,r_1})(Ey_{1,1})(Ey_{1,2})\ldots(Ey_{1,s_1})\\(x_{2,1})(x_{2,2})\ldots(x_{2,r_2})(Ey_{2,1})(Ey_{2,2})\ldots(Ey_{2,s_2})\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\(x_{k,1})(x_{k,2})\ldots(x_{k,r_k})(Ey_{k,1})(Ey_{k,2})\ldots(Ey_{k,s_k})A(x_{l_m}, y_{l_m}).\end{array}$$

The number k, that is, the number of strings of universal quantifiers separated from one another by existential quantifiers, will for the time being be

[13] Here x is an individual variable not occurring in $(P)A$.

[14] By Section 3, Theorem 5.

Es soll jetzt gezeigt werden, daß, wenn jeder Ausdruck vom Grad k entweder erfüllbar oder widerlegbar ist, dasselbe auch für jeden vom Grad $k+1$ gilt, womit offenbar eine Reduktion des Vollständigkeitssatzes auf den Satz: *Jede Formel ersten Grades ist entweder erfüllbar oder widerlegbar*, erreicht sein wird. Sei also $(P)A$ ein beliebiger Ausdruck vom Grad $k+1$; er läßt sich in der Form schreiben:

$$(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_s)(P')A,$$

wobei das Präfix P' vom Grad k ist. F sei eine in A nicht vorkommende Funktionsvariable; $u_1, u_2, \ldots, u_r$, $v_1, v_2, \ldots, v_s$ nicht in A vorkommende Individuenvariable. Wir bilden den Ausdruck:[15]

$$\begin{aligned} B = (u_1)(u_2)\ldots(u_r)(Ev_1)(Ev_2)\ldots(Ev_s)F(u_1, u_2, \ldots, u_r;\ v_1, v_2, \ldots, v_s) \\ \&\,(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(y_1)(y_2)\ldots(y_s)[F(x_1, \ldots, y_s) \rightarrow (P')A]. \end{aligned}$$

Da in P' die Variabeln $x_1, \ldots, y_s$ nicht vorkommen, so ist durch mehrmalige Anwendung von Axiom 6 und dem entsprechenden Satz für E beweisbar:

$$[F(x_1, \ldots, y_s) \rightarrow (P')A] \sim (P')[F(x_1, \ldots, y_s) \rightarrow A].$$

Folglich ist nach der Einsetzungsregel $B \sim B'$ beweisbar, wobei B' aus B durch Einsetzung der rechten Seite der letzten Äquivalenz an Stelle der linken entsteht. Auf B' kann aber offenbar der Satz 5, Abschnitt 3, angewendet werden. Sei

$$P' = (z_1)\ldots(z_p)(Et_1)\ldots(Et_q)(P''),$$

wo P'' vom Grade $k-1$ ist und

$$\begin{aligned} B'' = {} & (u_1)\ldots(u_r)(x_1)\ldots(x_r)(y_1)(y_2)\ldots(y_s)(z_1)\ldots(z_p) \\ & (Ev_1)\ldots(Ev_s)(Et_1)\ldots(Et_q)(P'') \\ & \{F(u_1, \ldots, u_r;\ v_1, \ldots, v_s)\,\&\,[F(x_1, \ldots, x_r;\ y_1, \ldots, y_s) \rightarrow A]\}. \end{aligned}$$

Dann ist also nach Satz 5, Abschnitt 3, $B' \sim B''$, folglich $B \sim B''$ beweisbar. B'' hat aber den Grad k, ist also entweder erfüllbar oder widerlegbar. Ist es erfüllbar, dann auch $(P)A$, denn offensichtlich ist $B \rightarrow (P)A$ allgemein giltig (auch der formale Beweis macht keine Schwierigkeiten, wird aber hier nicht erfordert). Ist B'' widerlegbar, also $\overline{B''}$ und folglich $\overline{B}$ beweisbar, so ist auch $\overline{(P)A}$ beweisbar. Das folgt durch Einsetzung von $(P')A$ in $\overline{B}$ an Stelle von F. Dadurch geht der vor &

[15] Ein ähnliches Verfahren hat Th. Skolem zum Beweise des bekannten nach ihm und Löwenheim benannten Satzes verwendet.

called the *degree* of the expression. We shall show that, if every expression of degree k is either satisfiable or refutable, so is every expression of degree $k+1$; that, clearly, yields a reduction of the completeness theorem to the theorem: *Every formula of degree 1 is either satisfiable or refutable.* Thus let $(P)A$ be any expression of degree $k+1$; it can be written in the form

$$(x_1)(x_2)\dots(x_k)(Ey_1)(Ey_2)\dots(Ey_s)(P')A,$$

where the prefix P' is of degree k. Let F be a functional variable not occurring in A, and let $u_1, u_2, \dots, u_r$, $v_1, v_2, \dots, v_s$ be individual variables not occurring in A. We form the expression[15]

$$\begin{aligned} B = (u_1)(u_2)\dots(u_r)(Ev_1)(Ev_2)\dots(Ev_s)F(u_1, u_2, \dots, u_r;\ v_1, v_2, \dots, v_s) \\ \&\,(x_1)(x_2)\dots(x_r)(y_1)(y_2)\dots(y_s)[F(x_1, \dots, y_s) \to (P')A]. \end{aligned}$$

Since the variables $x_1, \dots, y_s$ do not occur in P', the formula

$$[F(x_1, \dots, y_s) \to (P')A] \sim (P')[F(x_1, \dots, y_s) \to A]$$

can be proved by repeated use of Axiom 6 and the corresponding theorem for the existential quantifier. Hence, by the replacement rule, $B \sim B'$ is provable, where B' is obtained from B through the replacement of the left side of the last equivalence by the right one. But, clearly, Theorem 5 of Section 3 can be applied to B'. Let P' be

$$(z_1)\dots(z_p)(Et_1)\dots(Et_q)(P''),$$

where P'' is of degree $k-1$, and let B'' be

$$\begin{aligned} &(u_1)\dots(u_r)(x_1)\dots(x_r)(y_1)(y_2)\dots(y_s)(z_1)\dots(z_p) \\ &(Ev_1)\dots(Ev_s)(Et_1)\dots(Et_q)(P'') \\ &\{F(u_1, \dots, u_r;\ v_1, \dots, v_s)\,\&\,[F(x_1, \dots, x_r;\ y_1, \dots, y_s) \to A]\}. \end{aligned}$$

Then, by Theorem 5 of Section 3, $B' \sim B''$ is provable, and consequently so is $B \sim B''$. But B'' is of degree k, hence is either satisfiable or refutable. If it is satisfiable, so is $(P)A$, since clearly $B \to (P)A$ is valid (the formal proof itself presents no difficulties, but is not required here). If B'' is refutable, that is, if $\overline{B''}$, hence $\overline{B}$, is provable, then $\overline{(P)A}$, too, is provable. This follows by the replacement of F in $\overline{B}$ by $(P')A$. The subformula occurring before & goes therewith into $(P)A$, and the remainder (which we shall call T) becomes a tautology. Therefore, $\overline{(P)A\,\&\,T}$ and T are provable in the

[15]Th. Skolem has used a similar procedure for proving the well-known theorem named for him and Löwenheim.

stehende Formelteil in $(P)A$ über, der Rest (bezeichnet als T) wird tautologisch. Es ist also $\overline{(P)A \,\&\, T}$ und T beweisbar nach dem Aussagenkalkül, also auch $\overline{(P)A}$, d. h. $(P)A$ ist widerlegbar. Tatsächlich ist also $(P)A$ entweder erfüllbar oder widerlegbar, w. z. b. w.

5. Beweis des Vollständigkeitssatzes im engeren Sinn

Es genügt also zu zeigen, daß jede Normalformel ersten Grades entweder widerlegbar oder erfüllbar ist. Zu diesem Zweck sind einige Zwischenbetrachtungen erforderlich. Sei

$$(u_1)\dots(u_r)(Ev_1)\dots(Ev_s)A(u_1,\dots,u_r;\ v_1,\dots,v_s) = (P)A$$

irgend ein Ausdruck ersten Grades (A baut sich aus Elementarausdrücken der Form $F(u_p, u_q, \dots, v_l, v_m)$ und Aussagevariabeln mit Hilfe von $\vee$, $\&$, $\overline{}$, $\rightarrow$, $\sim$ auf). Ferner denke man sich die aus der Reihe $x_1, x_2, \dots$ ad infinitum entnommenen r-Tupel auf irgend eine Weise in eine Reihe geordnet. Dann soll für den Augenblick unter "*erster abgeleiteter*" von $(P)A$ der Ausdruck

$$\overset{1.)}{(Ex_1)}\dots\overset{r.)}{(Ex_1)}(Ex_2)\dots(Ex_{1+s})A(\overset{1.)}{x_1},\dots,\overset{r.)}{x_1},x_2,\dots,x_{1+s})$$

verstanden werden und allgemein unter *n-ter abgeleiteter* ein Ausdruck der Form

$$\begin{aligned}
&(Ex_{i_{1,1}})(Ex_{i_{1,2}})\dots(Ex_{i_{n,r+s}}) \\
&\qquad [A(x_{i_{1,1}}, x_{i_{1,2}}, \dots, x_{i_{1,r}};\ x_{i_{1,r+1}}, \dots, x_{i_{1,r+s}}) && 1.) \\
&\qquad \& \, A(x_{i_{2,1}}, x_{i_{2,2}}, \dots, x_{i_{2,r}};\ x_{i_{2,r+1}}, \dots, x_{i_{2,r+s}}) && 2.) \\
&\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\qquad \& \, A(x_{i_{n,1}}, x_{i_{n,2}}, \dots, x_{i_{n,r}};\ x_{i_{n,r+1}}, \dots, x_{i_{n,r+s}})]. && n.)
\end{aligned}$$

Er wird mit $(P_n)A_n$ bezeichnet. $(P_n)A_n$ ist also das logische Produkt von n Ausdrücken $A(\dots)$, die sich voneinander nur durch die Bezeichnung der Variabeln unterscheiden, mit einem Präfix, in dem nur E-Zeichen vorkommen und durch das alle in A_n vorkommenden Variabeln gebunden werden. Die Indizes sollen nach folgender Regel bestimmt werden:

1.) Die im ersten Ausdruck A vorkommenden Indizes $i_{1,1}, \dots, i_{1,r}$; $i_{1,r+1}, \dots, i_{1,r+s}$ sollen einfach die Zahlen $\overset{1)}{1}, \overset{2)}{1}, \dots, \overset{r)}{1}; \overset{r+1)}{2}, \dots, \overset{r+s.)}{1+s}$ sein.

2.) Die im k-ten Ausdruck A vorkommenden Indizes $i_{k,1}, \dots, i_{k,r}$ sollen das auf $i_{k-1,1}, \dots, i_{k-1,r}$ in der vorausgesetzten Anordnung folgende r-Tupel sein.

propositional calculus; hence, so is $\overline{(P)A}$, and $(P)A$ is refutable. Therefore $(P)A$ is indeed either satisfiable or refutable, q. e. d.

5. Proof of the completeness theorem in the restricted sense

It therefore suffices to show that every normal formula of degree 1 is either refutable or satisfiable. There are a number of points that we must now consider by way of preparation. Let

$$(u_1)\dots(u_r)(Ev_1)\dots(Ev_s)A(u_1,\dots,u_r;\ v_1,\dots,v_s),$$

which we shall call $(P)A$, be any expression of degree 1 (A is built up from elementary expressions of the form $F(u_p, u_q, \dots, v_l, v_m)$ and propositional variables by means of $\vee$, &, $\overline{}$, $\to$, $\sim$). Furthermore, let us imagine that the r-tuples of elements of the infinite sequence $x_1, x_2, \dots$ are, in some way, ordered as a sequence. Then, for the time being, we shall understand by *first derived expression* of $(P)A$ the expression

$$\underbrace{(Ex_1)\dots(Ex_1)}_{r\text{ times}}(Ex_2)\dots(Ex_{1+s})A(\underbrace{x_1,\dots,x_1}_{r\text{ times}},x_2,\dots,x_{1+s})$$

and, in general, by the *nth derived expression* an expression of the form

$$\begin{aligned}&(Ex_{i_{1,1}})(Ex_{i_{1,2}})\dots(Ex_{i_{n,r+s}})\\ &\qquad [A(x_{i_{1,1}},x_{i_{1,2}},\dots,x_{i_{1,r}};\ x_{i_{1,r+1}},\dots,x_{i_{1,r+s}}) &&(1)\\ &\qquad \&\, A(x_{i_{2,1}},x_{i_{2,2}},\dots,x_{i_{2,r}};\ x_{i_{2,r+1}},\dots,x_{i_{2,r+s}}) &&(2)\\ &\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\qquad \&\, A(x_{i_{n,1}},x_{i_{n,2}},\dots,x_{i_{n,r}};\ x_{i_{n,r+1}},\dots,x_{i_{n,r+s}})]. &&(n)\end{aligned}$$

Let us call it $(P_n)A_n$. Hence $(P_n)A_n$ is the logical product of n expressions $A(\dots)$, which differ from one another only by the subscripts of the variables, preceded by a prefix in which only existential quantifiers occur and which binds all the variables occurring in A_n. The subscripts are to be determined by the following rule:

(1) The subscripts $i_{1,1},\dots,i_{1,r};\ i_{1,r+1},\dots,i_{1,r+s}$ occurring in the first expression A are simply the numbers $1,1,\dots,1;\ 2,\dots,1+s$, with r initial 1's.

(2) The subscripts $i_{k,1},\dots,i_{k,r}$ occurring in the kth expression A are to be the r-tuple following $i_{k-1,1},\dots,i_{k-1,r}$ in the assumed ordering.

3.) Die im k-ten Ausdruck vorkommenden Indizes $i_{k,r+1}, \ldots, i_{k,r+s}$ sollen irgend welche untereinander und von *sämtlichen* in den $k-1$ ersten Ausdrücken A vorkommenden Indizes sowie von sämtlichen $i_{k,1}, \ldots, i_{k,r}$ verschiedene Indizes sein. Um diese Bestimmung eindeutig zu machen wird festgesetzt, daß es von den in Betracht kommenden die mit kleinster Summe sein sollen. Man sieht ohneweiters ein, daß man die zu Anfang vorausgesetzte Anordnung der r-Tupel so einrichten kann, daß jeder der Indizes $i_{k,1}, \ldots, i_{k,r}$ schon in einem der vorhergehenden $k-1$ Ausdrücken A vorkommt (schon jede Ordnung nach steigender Summe erfüllt diese Forderung[16]).

Jetzt ergibt sich, daß für jedes k $(P)A \rightarrow (P_k)A_k$ eine beweisbare Formel ist. Für $k=1$ folgt das in trivialer Weise durch Anwendung von

$$(x)F(x) \rightarrow (Ex)F(x).$$

Angenommen nun, die Behauptung sei für $k=n$ schon bewiesen, also $(P)A \rightarrow (P_n)A_n$ beweisbar. A_{n+1} läßt sich offenbar in der Form schreiben

$$A_n \mathbin{\&} A(x_{i_{n+1,1}}, \ldots, x_{i_{n+1,r}};\ x_{i_{n+1,r+1}}, \ldots, x_{i_{n+1,r+s}}),$$

wobei die $i_{n+1,1}, \ldots, i_{n+1,r+s}$ nach obigen Regeln bestimmt sind (um die Häufung der Indizes zu vermeiden soll diese Variabelnreihe im Folgenden als $z_1, \ldots, z_r; z_{r+1}, \ldots, z_{r+s}$ geschrieben werden). Die $z_{r+1}, \ldots, z_{r+s}$ kommen in A_n, also auch in (P_n), nicht vor. Auch von $z_1, \ldots, z_r$ [17] sind sie verschieden. Dagegen kommen $z_1, z_2, \ldots, z_r$ sämtlich in A_n vor (siehe oben). Dies vorausgesetzt sind folgende Formeln beweisbar:

1.) $$(P_n)A_n \sim (Ez_1)\ldots(Ez_r)(P_n')A. \qquad (1)$$

Dabei ist P_n' das Präfix, welches aus P_n durch Weglassung von $(Ez_1)\ldots(Ez_r)$ (die ja sämtlich in ihm vorkommen) entsteht. In P_n' kommt also keine der Variabeln $z_1, \ldots, z_r$; $z_{r+1}, \ldots, z_{r+s}$ vor. Die Beweisbarkeit von (1) ergibt sich aus Satz 4, Abschnitt 3.

2.) $$(z_1)\ldots(z_r)(Ez_{r+1})\ldots(Ez_{r+s})A(z_1, \ldots, z_r;\ z_{r+1}, \ldots, z_{r+s}) \mathbin{\&}$$
$$(Ez_1)\ldots(Ez_r)(P_n')A_n \rightarrow$$

[16] Denn jede solche Anordnung hat die Eigenschaft, daß mit dem k-ten r-Tupel höchstens eine neue Zahl und zwar die nächst folgende zu den bisherigen hinzukommt. Diese muß aber, wenn sie nicht noch früher vertreten ist, mit $i_{k-1,r+1}$ identisch sein.

[17] Es ist zu beachten, daß diese teilweise identisch sein können!

(3) The subscripts $i_{k,r+1}, \ldots, i_{k,r+s}$, occurring in the kth expression are to be distinct from one another and from *all* subscripts occurring in the first $k-1$ expressions A, as well as from all $i_{k,1}, \ldots, i_{k,r}$. To determine the subscripts unambiguously, we stipulate that, among those that could possibly be chosen, we take those with the smallest sum. We immediately see that the ordering of the r-tuples that we initially assumed can be arranged so that each of the subscripts $i_{k,1}, \ldots, i_{k,r}$ already occurs in one of the preceding $k-1$ expressions A (every ordering according to increasing sum already satisfies this requirement[16]).

It now turns out that, for every k, the formula $(P)A \rightarrow (P_k)A_k$ is provable. For $k=1$, this follows trivially, by means of

$$(x)F(x) \rightarrow (Ex)F(x).$$

Let us now assume that the statement has already been proved for $k=n$, hence that $(P)A \rightarrow (P_n)A_n$ is provable. Clearly, A_{n+1} can be written in the form

$$A_n \mathbin{\&} A(x_{i_{n+1,1}}, \ldots, x_{i_{n+1,r}};\ x_{i_{n+1,r+1}}, \ldots, x_{i_{n+1,r+s}}),$$

where the $i_{n+1,1}, \ldots, i_{n+1,r+s}$ are determined by the rules given above (to avoid the piling up of subscripts, this sequence of variables will from now on be written $z_1, \ldots, z_r;\ z_{r+1}, \ldots, z_{r+s}$). The $z_{r+1}, \ldots, z_{r+s}$ do not occur in A_n, hence not in (P_n) either. They are also different from $z_1, \ldots, z_r$.[17] On the other hand, $z_1, z_2, \ldots, z_r$ all occur in A_n (see above). This being assumed, the following formulas are provable:

1) $$(P_n)A_n \sim (Ez_1)\ldots(Ez_r)(P_n')A. \qquad (1)$$

Here P_n' is the prefix that results from P_n when $(Ez_1)\ldots(Ez_r)$ (all of which occur in P_n) are omitted. Hence none of the variables $z_1, \ldots, z_r;$ $z_{r+1}, \ldots, z_{r+s}$ occurs in P_n'. The provability of (1) follows from Theorem 4 of Section 3.

2) $$(z_1)\ldots(z_r)(Ez_{r+1})\ldots(Ez_{r+s})A(z_1, \ldots, z_r;\ z_{r+1}, \ldots, z_{r+s}) \mathbin{\&} (Ez_1)\ldots(Ez_r)(P_n')A_n \rightarrow$$

[16] For every such ordering has the property that, with the kth r-tuple, at most one new number is introduced, and indeed the one that immediately follows those that have been previously introduced. But this number, if it has not yet occurred, must be identical with $i_{k-1,r+1}$.

[17] Observe that these numbers may, in part, be identical!

$$(Ez_1)\dots(Ez_r)[(Ez_{r+1})\dots(Ez_{r+s})A(z_1,\dots,z_{r+s})\,\&\,(P'_n)A_n].^{18} \tag{2}$$

Das ergibt sich aus Satz 6, Abschnitt 3, indem man

$$(Ez_{r+1})\dots(Ez_{r+s})A(z_1,\dots,z_r;\ z_{r+1},\dots,z_{r+s})$$

für F und $(P'_n)A_n$ für G setzt.

3.) Ist der in (2) auf das $\rightarrow$ folgende Formelteil als äquivalent erweisbar mit $(P_{n+1})A_{n+1}$. Denn auf

$$(Ez_{r+1})\dots(Ez_{r+s})A(z_1,\dots,z_{r+s})\,\&\,(P'_n)A_n$$

kann Satz 5, 3. Abschnitt, angewendet werden, da weder die Variablen $z_{r+1},\dots,z_{r+s}$ in $(P'_n)A_n$ noch die in (P'_n) enthaltenen Variabeln im ersten Teil vorkommen. Also ist der obige Ausdruck als äquivalent beweisbar mit

$$(Ez_{r+1})\dots(Ez_{r+s})(P'_n)[A(z_1,\dots,z_{r+s})\,\&\,A_n].$$

Der ganze auf das $\rightarrow$ Zeichen in (2) folgende Formelteil ist also (nach der Einsetzungsregel) als äquivalent beweisbar mit

$$(Q_{n+1})A_n\,\&\,A(z_1,\dots,z_{r+s}),$$

wobei sich Q_{n+1} höchstens in der Reihenfolge der E-Zeichen von P_{n+1} unterscheidet, also auch als äquivalent beweisbar mit $(P_{n+1})A_{n+1}$. Setzt man in (2) die als äquivalent gefundenen Ausdrücke ein, so sieht man, daß beweisbar ist:

$$(z_1)\dots(z_r)(Ez_{r+1})\dots(Ez_{r+s})A\,\&\,[(P_n)A_n \rightarrow (P_{n+1})A_{n+1}]$$

und da natürlich

$$(P)A \rightarrow (z_1)\dots(z_r)(Ez_{r+1})\dots(Ez_{r+s})A$$

beweisbar ist (auch wenn mehrere z_i $(1 \leq i \leq r)$ identisch sind) so auch

$$(P)A\,\&\,[(P_n)A_n \rightarrow (P_{n+1})A_{n+1}].$$

Da ferner nach induktiver Annahme $(P)A \rightarrow (P_n)A_n$ beweisbar ist, so auch $(P)A \rightarrow (P_{n+1})A_{n+1}$, w. z. b. w.

[18]Hier und in den folgenden Formeln hat man sich in den Präfixen jedes von den verschiedenen z_i $(1 \leq i \leq r)$ nur *einmal* angeschrieben zu denken.

$$(Ez_1)\dots(Ez_r)[(Ez_{r+1})\dots(Ez_{r+s})A(z_1,\dots,z_{r+s})\,\&\,(P_n')A_n].^{18} \qquad (2)$$

This follows from Theorem 6 of Section 3 when we put

$$(Ez_{r+1})\dots(Ez_{r+s})A(z_1,\dots,z_r;\; z_{r+1},\dots,z_{r+s})$$

for F and $(P_n')A_n$ for G.

3) The subformula that, in (2), follows the sign $\to$ is provably equivalent to $(P_{n+1})A_{n+1}$. For Theorem 5 of Section 3 can be applied to

$$(Ez_{r+1})\dots(Ez_{r+s})A(z_1,\dots,z_{r+s})\,\&\,(P_n')A_n,$$

since the variables $z_{r+1},\dots,z_{r+s}$ do not occur in $(P_n')A_n$ and the variables contained in (P_n') do not occur in the first part. Hence the expression above is provably equivalent to

$$(Ez_{r+1})\dots(Ez_{r+s})(P_n')[A(z_1,\dots,z_{r+s})\,\&\,A_n].$$

The entire subformula that follows the sign $\to$ in (2) is therefore, by the replacement rule, provably equivalent to

$$(Q_{n+1})A_n\,\&\,A(z_1,\dots,z_{r+s}),$$

where Q_{n+1} differs from P_{n+1} at most in the order of the existential quantifiers; hence it is also provably equivalent to $(P_{n+1})A_{n+1}$. If, in (2), expressions are replaced by those that have been found to be equivalent, we see that

$$(z_1)\dots(z_r)(Ez_{r+1})\dots(Ez_{r+s})A\,\&\,[(P_n)A_n \to (P_{n+1})A_{n+1}]$$

is provable and, since, of course,

$$P(A) \to (z_1)\dots(z_r)(Ez_{r+1})\dots(Ez_{r+s})A$$

is provable (even if several z_i, $1 < i \leq r$, are identical), so is

$$(P)A\,\&\,[(P_n)A_n \to (P_{n+1})A_{n+1}].$$

Since further, by the induction assumption, $(P)A \to (P_n)A_n$ is provable, so is $(P)A \to (P_{n+1})A_{n+1}$, q. e. d.

[18] Here and in the subsequent formulas we have to imagine that each of the various z_i, $1 \leq i \leq r$, is written only *once*.

Mögen nun in A die Funktionsvariabeln $F_1^{i_1}, \ldots, F_p^{i_p}$ sowie die Aussagevariabeln $X_1, \ldots, X_q$ vorkommen (die Individuenvariabeln sind ja sämtlich gebunden). Wir bezeichnen als ein zu $(P)A$ gehöriges *Erfüllungssystem n-ter Stufe* ein im Bereich der natürlichen Zahlen $1 \leq x \leq 1 + ns$ definiertes System von Funktionen $f_1^{i_1}, \ldots, f_p^{i_p}$, sowie Aussagen $U_1, \ldots, U_q$, von der Eigenschaft, daß, wenn man in A_n an Stelle der Funktionsvariabeln $F_1, \ldots, F_p$ die Funktionen $f_1, \ldots, f_p$, an Stelle der Aussagevariabeln $X_1, \ldots, X_q$ die Aussagen $U_1, \ldots, U_q$ und an Stelle jedes x_i die entsprechende Ziffer i einsetzt,[19] ein wahrer Satz entsteht. Ferner bezeichnen wir als die zu $(P)A$ gehörige Aussageformel n-ter Stufe (C_n) die Aussageformel, welche entsteht, wenn man in A_n an Stelle der Elementarbestandteile $F_k^{i_k}(x, \ldots, x)$ Aussagevariable einsetzt und zwar an Stelle verschiedener Elementarbestandteile (sie mögen sich durch das F oder durch die x unterscheiden) verschiedene Aussagevariable, die auch sämtlich von den in A_n schon vorkommenden $X_1, \ldots, X_q$ verschieden sind. Es ist ersichtlich, daß es dann und nur dann ein Erfüllungssystem n-ter Stufe von $(P)A$ gibt, wenn die zu $(P)A$ gehörige Aussageformel n-ter Stufe erfüllbar ist. (Denn die Wahrheitswerte der Elementarbestandteile $F_l^{i_l}(k_1, \ldots, k_{i_l})$—die k bedeuten hier Ziffern—können ja von einander und von den Wahrheitswerten der X_i völlig unabhängig bestimmt werden.) Mit den jetzt bereitgestellten Hilfsmitteln kann der Beweis des Vollständigkeitssatzes (i. e. S.) zu Ende geführt werden.

Die zu $(P)A$ gehörigen Aussageformeln sind als solche entweder erfüllbar oder widerlegbar (Satz 1, Abschnitt 3) und es sind also nur zwei Fälle denkbar.

1.) Mindestens eine der zugeordneten Aussageformeln (es sei die n-ter Stufe) ist widerlegbar, d. h. $\overline{C_n}$ ist beweisbar. Daraus folgt durch Rückeinsetzung der Elementarbestandteile $F_l(x_i, \ldots, x_k)$ an Stelle der Aussagevariabeln, daß auch $\overline{A_n}$, also (nach Regel 3, Abschnitt 3) auch $(x_1) \ldots (x_{1+ns})\overline{A_n}$ beweisbar ist. Folglich auch

$$\overline{(Ex_1) \ldots (Ex_{1+ns}) A_n},$$

d. h. $\overline{(P_n)A_n}$. Da aber (siehe oben) $(P)A \rightarrow (P_n)A_n$ beweisbar ist, so auch $\overline{(P)A}$. D. h. *in diesem Fall ist* $(P)A$ *widerlegbar.*

2.) Keine der zugeordneten Aussageformeln ist widerlegbar, d. h. alle sind erfüllbar. Dann gibt es zu $(P)A$ gehörige Erfüllungssysteme beliebig hoher Stufe. Nun wachsen die Denkbereiche der Erfüllungssyteme monoton mit n (sie sind ja $1 \leq x \leq 1 + ns$) und der auf $1 \leq x \leq 1 + ns$ *beschränkte*

[19]Man überzeugt sich leicht, daß bei der oben festgesetzten Anordnung der r-Tupel in A genau die Variabeln x_1 bis x_{1+ns} vorkommen, denn mit jedem Schritt kommen genau s neue Variable hinzu und zwar die *nächsten* s.

Assume now that the functional variables $F_1^{i_1}, \ldots, F_p^{i_p}$, as well as the propositional variables $X_1, \ldots, X_q$, occur in A (each individual variable being bound, as we know). A *satisfying system of level n* for $(P)A$ will be a system of functions, $f_1^{i_1}, \ldots, f_p^{i_p}$ (defined in the domain of the natural numbers x, with $1 \leq x \leq 1 + ns$), and of propositions, $U_1, \ldots, U_q$, such that a true proposition results when we put the functions $f_1, \ldots, f_p$ for the functional variables $F_1, \ldots, F_p$, the propositions $U_1, \ldots, U_q$ for the propositional variables $X_1, \ldots, X_q$, and, for each x_i, the corresponding numeral i.[19] Furthermore, C_n, the propositional formula of level n for $(P)A$, will be the propositional formula that results when, in A_n, the basic components $F_k^{i_k}(x, \ldots, x)$ are replaced by propositional variables, basic components that differ (whether in the F or the x's) being replaced by different propositional variables, all of which also differ from the $X_1, \ldots, X_q$ already occurring in A_n. Clearly, there exists a satisfying system of level n for $(P)A$ if and only if the propositional formula of level n associated with $(P)A$ is satisfiable. (For the truth values of the basic components $F_l^{i_l}(k_1, \ldots, k_{i_l})$, where the k's are numerals, can be determined completely independently from each other and from the truth values of the X_i.) With the means that we now have at hand, the proof of the completeness theorem (i. t. r. s.) can be brought to its conclusion.

The propositional formulas associated with $(P)A$ are, as such, either satisfiable or refutable (Theorem 1 of Section 3), and therefore only two cases are conceivable:

(1) At least one of the associated propositional formulas (the one of level n, say) is refutable, that is, $\overline{C_n}$ is provable. From that it follows, if we substitute back the basic components $F_l(x_i, \ldots, x_k)$ for the propositional variables, that $\overline{A_n}$, too, is provable, and (by Rule 3 of Section 3) so is $(x_1) \ldots (x_{1+ns})\overline{A_n}$; therefore, so is

$$\overline{(Ex_1) \ldots (Ex_{1+ns})A_n},$$

that is, $\overline{(P_n)A_n}$. Since, however, $(P)A \to (P_n)A_n$ is provable (see above), so is $\overline{(P)A}$. That is, *in this case* $(P)A$ *is refutable.*

(2) None of the associated propositional formulas is refutable, that is, they are all satisfiable. Then there exist satisfying systems of arbitrarily high level for $P(A)$. Now, the domains of the satisfying systems increase monotonically with n (for any element x in them, we have $1 \leq x \leq 1 + ns$) and, in a satisfying system of level higher than n, the *part*

[19] We can readily convince ourselves that, with the ordering of the r-tuples that was adopted above, exactly the variables $x_1, \ldots, x_{1+ns}$ occur in A, since at every step exactly s new variables are introduced, namely the *next* s variables.

Teil[20] eines Erfüllungssystems höherer als n-ter Stufe ist ein Erfüllungssystem n-ter Stufe, wie aus der Bildung von A_n durch fortgesetzte &-Verknüpfung hervorgeht. Ferner gibt es sicher nur endlich viele zu $(P)A$ gehörige Erfüllungssysteme n-ter Stufe[21] (in einem endlichen Denkbereich gibt es ja überhaupt nur endlich viele Funktionssysteme $F_1, \ldots, F_p$). Also muß mindestens *eines* der Erfüllungssysteme erster Stufe in unendlich vielen höherer Stufe als Teil enthalten sein. Zu *diesem* gibt es folglich ein Erfüllungssystem zweiter Stufe, in dem es als Teil vorkommt und zwar ein solches, das ebenfalls in unendlich vielen höherer Stufe als Teil enthalten ist. So weiter schließend zeigt man in bekannter Weise die Existenz einer Folge von Erfüllungssystemen $S_1, S_2, \ldots, S_i, \ldots$ ad infinitum, wobei $S_i \subset S_{i+1}$ und S_i von i-ter Stufe ist. (Der Definitionsbereich von S_i ist $1 \leq x \leq 1 + si$.) Wir definieren nun ein Funktionssystem S im Bereich *aller* natürlichen Zahlen—man könnte sagen—als oberen Limes der Reihe $S_1, \ldots, S_i, \ldots$—indem wir festsetzen: Die Relation $g_k^{i_k}$ (für $1 \leq k \leq p$) soll dann und nur dann zwischen den *Zahlen* $z_1, \ldots, z_{i_k}$ bestehen, wenn es in der obigen Reihe ein Erfüllungssystem S_l gibt, in dessen Definitionsbereich $z_1, \ldots, z_{i_k}$ sämtlich vorkommen und für das $f_k^{i_k}(z_1, \ldots, z_{i_k})$ besteht.[22] Ganz entsprechend soll natürlich für die Aussage X_i in S eine Aussage W_i genommen werden, für welche es ein S_l gibt, in dem die entsprechende Aussage U_i denselben Wahrheitswert hat.[23] Es ergibt sich nun ohneweiters, daß der auf $1 \leq x \leq 1+ns$ beschränkte Teil von S mit S_n identisch, also ein Erfüllungssystem n-ter Stufe ist, daß also, wenn man in A_n an Stelle der $F_k^{i_k}$ die $g_k^{i_k}$ und an Stelle der X_i die W_i, sowie an Stelle der x_i die Zahlen i einsetzt, ein wahrer Satz entsteht (das gilt für alle n.) Daraus folgt aber weiter, daß das System $S = (g_1, \ldots, g_p;\ W_1, \ldots, W_q)$ den Ausdruck $(P)A$, d. h.

$$(u_1) \ldots (u_r)(Ev_1) \ldots (Ev_s)A(u_1, \ldots, v_s)$$

erfüllt. Dazu ist nur noch zu beweisen, daß es zu jedem r-Tupel von natürlichen Zahlen $k_1, \ldots, k_r$ ein s-Tupel von Zahlen $l_1, \ldots, l_s$ gibt, so daß

$$A'(k_1, \ldots, k_r;\ l_1, \ldots, l_s)$$

[20]Unter den auf m beschränkten Teil eines im Denkbereich M ($m \subset M$) definierten Funktionssystems S ist natürlich dasjenige in m definierte Funktionssystem zu verstehen, welches innerhalb m mit S übereinstimmt. Die im Erfüllungssystem außerdem noch vorkommenden Aussagen $U_1, \ldots, U_q$ sollen durch Aussagen gleichen Wahrheitswertes in m ersetzt werden.

[21]Erfüllungssysteme, in denen für die X_i verschiedene Aussagen aber vom gleichen Wahrheitswert eingesetzt werden, sind dabei als identisch zu betrachten.

[22]Natürlich gilt dasselbe dann für *alle* S_l, in deren Definitionsbereich $z_1, \ldots, z_{i_k}$ vorkommen.

[23]Dasselbe gilt dann für *alle* S_l.

restricted[20] by the condition $1 \leq x \leq 1 + ns$ is a satisfying system of level n, as is apparent from the way A_n is constructed by repeated conjunction. Furthermore, there surely exist only finitely many satisfying systems of level n for $(P)A$[21] (in a finite domain there are, after all, only finitely many systems of functions, $F_1, \dots, F_p$). Hence at least *one* of the satisfying systems of level 1 must be contained as a part in infinitely many satisfying systems of higher level. For *that* system, consequently, there exists a satisfying system of level 2 which contains it as a part and, moreover, is itself likewise contained as a part in infinitely many systems of higher level. The argument can be repeated indefinitely, and we show, in a familiar manner, the existence of an infinite sequence of satisfying systems, $S_1, S_2, \dots, S_i, \dots$, where $S_i \subset S_{i+1}$ and S_i is of level i. (The domain of definition of S_i consists of the x's such that $1 \leq x \leq 1 + si$.) We now define a system S of functions, in the domain of *all* natural numbers, as the upper limit, so to speak, of the sequence $S_1, \dots, S_i, \dots$, by stipulating: the relation $g_k^{i_k}$, for $1 \leq k \leq p$, is to obtain between the *numbers* $z_1, \dots, z_{i_k}$ if, in the sequence given above, there is a satisfying system S_l in whose domain of definition all of $z_1, \dots, z_{i_k}$ occur and for which $f_k^{i_k}(z_1, \dots, z_{i_k})$ holds.[22] Similarly, we must, of course, take for the proposition X_i in S a proposition W_i for which there exists an S_l in which the corresponding proposition U_i has the same truth value.[23] It now immediately turns out that in S the part restricted by the condition $1 \leq x \leq 1 + ns$ is identical with S_n, hence is a satisfying system of level n; hence, if in A_n we put the $g_k^{i_k}$ for the $F_k^{i_k}$ and the W_i for the X_i, as well as the numbers i for the x_i, we obtain a true sentence (this holds for all n). From that, however, it further follows that the system $S = (g_1, \dots, g_p;\ W_1, \dots, W_q)$ satisfies the expression $(P)A$, that is, the expression

$$(u_1)\dots(u_r)(Ev_1)\dots(Ev_s)A(u_1, \dots, v_s).$$

To show this, we need merely prove that, for every r-tuple of natural numbers, $k_1, \dots, k_r$, there exists an s-tuple of numbers, $l_1, \dots, l_s$, such that

$$A'(k_1, \dots, k_r;\ l_1, \dots, l_s)$$

[20] By a part restricted to m of a function system S defined in a universal domain M ($m \subset M$) we must, of course, understand the function system defined in m which, within m, coincides with S. Any additional propositional variables, $U_1, \dots, U_q$, that occur in the satisfying system are to be replaced by propositions having the same truth value in m.

[21] Here we consider as identical those satisfying systems in which different propositions having the same truth values are put for the X_i.

[22] The same then holds, of course, for *all* S_l in whose domain of definition $z, \dots, z_{i_k}$ occur.

[23] The same then holds for *all* S_l.

eine richtige Aussage wird.[24] Das ist aber leicht einzusehen, denn das r-Tupel $k_1, \ldots, k_r$ tritt ja in der oben eingeführten Reihenfolge an irgend einer Stelle auf (etwa an der n-ten). Wir betrachten den Ausdruck A_n. Er lässt sich schreiben als

$$A_{n-1} \,\&\, A(x_{k_1}, \ldots, x_{k_r};\ x_{t_1}, \ldots, x_{t_s}).^{25}$$

Durch Einsetzung von S und den Ziffern statt der Variabeln entsteht der *wahre* Satz

$$A'_{n-1} \,\&\, A'(k_1, \ldots, k_r;\ t_1, \ldots, t_s).$$

Also ist auch

$$A'(k_1, \ldots, k_r;\ t_1, \ldots, t_s)$$

wahr, d. h. es gibt s Zahlen $t_1, \ldots, t_s$ von der verlangten Eigenschaft. S erfüllt $(P)A$. Tatsächlich ist also $(P)A$ entweder widerlegbar oder erfüllbar, womit der Beweis des Vollständigkeitssatzes (i. e. S.) zu Ende geführt ist. Als Korollar folgt daraus, daß jeder Ausdruck (i. e. S.) entweder widerlegbar oder im *genau* abzählbaren Denkbereich erfüllbar ist.

6. Beweis des Vollständigkeitssatzes im weiteren Sinn

Der Beweis, daß auch das logische Axiomensystem i. w. S. vollständig ist, ergibt sich aus dem Bisherigen leicht. Hier gilt allerdings nicht, daß jeder logische Ausdruck (i. w. S.) entweder widerlegbar oder im *genau* abzählbaren Denkbereich erfüllbar ist (Gegenbeispiel: $(x)(y)(x = y)$), wohl aber in einem *höchstens* abzählbaren Denkbereich. Wir beweisen den Satz hier in der Form: *Jeder logische Ausdruck im weiteren Sinn ist entweder beweisbar oder seine Negation erfüllbar.* Sei A ein logischer Ausdruck i. w. S.[26] Es mögen in ihm die Funktionsvariabeln $F^1_1, \ldots, F^1_{k_1};\ F^2_1, \ldots, F^2_{k_2}; \ldots$ usw. und sonst keine vorkommen. Wir bilden den Ausdruck

[24] Die durch Einsetzung von S entstehenden Ausdrücke sollen mit Strichen bezeichnet werden.

[25] Mit $t_1, \ldots, t_s$ sollen der Kürze halber die nach obiger Regel bestimmten Indizes bezeichnet werden.

[26] Man kann natürlich wie oben voraussetzen, daß A keine freien Individuenvariabeln enthält.

is a correct proposition.[24] But that can readily be seen, since the r-tuple $k_1, \dots, k_r$ occurs at some place (at the nth one, say) in the sequence introduced above. We now consider the expression A_n. It can be written as

$$A_{n-1} \mathbin{\&} A(x_{k_1}, \dots, x_{k_r};\ x_{t_1}, \dots, x_{t_s}).^{25}$$

If we substitute S and the numerals for the variables, we obtain the *true* sentence

$$A'_{n-1} \mathbin{\&} A'(k_1, \dots, k_r;\ t_1, \dots, t_s).$$

Hence

$$A'(k_1, \dots, k_r;\ t_1, \dots, t_s)$$

is also true; that is, there are s numbers, $t_1, \dots, t_s$, with the required property. The system S satisfies $(P)A$. Hence $(P)A$ is indeed either refutable or satisfiable, which concludes the proof of the completeness theorem (i. t. r. s.). As a corollary, it follows that every expression (i. t. r. s.) is either refutable or satisfiable in an *exactly* denumerable domain.

6. Proof of the completeness theorem in the extended sense

The proof that the logical axiom system i. t. e. s., too, is complete is readily obtained from what precedes. Here, however, it is not the case that every logical expression (i. t. e. s.) is either refutable or satisfiable in an *exactly* denumerable domain (counter-example: $(x)(y)(x = y)$); rather, this will be so in an *at most* denumerable domain. Here we prove the theorem in the form: *For every logical expression in the extended sense, either it is provable or its negation is satisfiable.* Let A be a logical expression i. t. e. s. Assume that the functional variables $F_1^1, \dots, F_{k_1}^1;\ F_1^2, \dots, F_{k_2}^2, \dots$ and so on, but no others, occur in it.[26] We form the expression

[24]The expressions obtained from S by substitution are to be marked with the prime symbol.

[25]For the sake of brevity we shall write the subscripts determined by the rule given above as $t_1, \dots, t_s$.

[26]We can of course assume, as above, that A contains no free individual variables.

$$\begin{aligned}(x)G(x,x)\,\&\,&(x)(y)(z)\{G(x,y)\rightarrow[G(x,z)\rightarrow G(y,z)]\}\,\&\\&(x)(y)(z)\{G(x,y)\rightarrow[G(z,x)\rightarrow G(z,y)]\}\,\&\\&(x)(y)\{G(x,y)\rightarrow[F_1^1(x)\rightarrow F_1^1(y)]\}\,\&\\&(x)(y)\{G(x,y)\rightarrow[F_2^1(x)\rightarrow F_2^1(y)]\}\,\&\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&(x)(y)(z)\{G(x,y)\rightarrow[F_1^2(x,z)\rightarrow F_1^2(y,z)]\}\,\&\\&(x)(y)(z)\{G(x,y)\rightarrow[F_1^2(z,x)\rightarrow F_1^2(z,y)]\}\,\&\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Analoge Ausdrücke für alle F_l^m.

Dieser ganze Ausdruck werde mit K' bezeichnet. Ferner bezeichne A' den Ausdruck, der aus A entsteht, wenn man überall das Gleichheitszeichen durch G ersetzt. Die Formel $K' \rightarrow A'$ enthält kein $=$-Zeichen mehr. Für sie gilt also, daß sie entweder beweisbar oder ihre Negation erfüllbar ist (das gilt ja sogar schon für das logische Axiomensystem im engeren Sinn).

Wenn 1.) $K' \rightarrow A'$ beweisbar ist, dann offenbar auch A. Man braucht ja nur an Stelle von G in $K' \rightarrow A'$ das $=$-Zeichen einzusetzen (K' möge dadurch in K, A' in A übergehen). Da K eine unmittelbare Folge von Axiom 7 und 8, $K \rightarrow A$ nach der Einsetzungsregel beweisbar ist, *ist in diesem Fall A beweisbar.*

Ist 2.) die Negation von $K' \rightarrow A'$, d. h. $K' \,\&\, \overline{A'}$ erfüllbar, dann auch $\overline{A}$, wie jetzt bewiesen werden soll. Das erfüllende Funktionssystem von $K' \,\&\, \overline{A'}$ soll mit $[g, f_l^m]$ bezeichnet werden. Offensichtlich ist g auf Grund von K' symmetrisch, reflexiv und transitiv. Der Denkbereich N von (g, f_l^m) [27] zerfällt also durch g in (höchstens abzählbar viele) Klassen $N_1, N_2, \ldots, N_k$, $\ldots$. Diese Klassen sollen die Elemente eines neuen Denkbereiches (N') bilden und in diesem sollen Funktionen g', $(f_l^m)'$, erklärt werden durch die Festsetzung: $(f_l^m)'(N_{i_1}, \ldots, N_{i_m})$ soll dann und nur dann bestehen, wenn es Elemente des früheren Denkbereichs $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_m})$ gibt, so daß $a_{i_k} \in N_{i_k}$ und $f_l^m(a_{i_1}, \ldots, a_{i_m})$ gilt. Dann gelten offenbar folgende Sätze:

1.) g' ist in N' die Identität, d. h. es gilt $g'(N_i, N_k)$ dann und nur dann, wenn N_i und N_k die selbe Klasse sind.

2.) Ersetzt man in irgend einer in N richtigen (bezw. falschen) Zählaussage i. e. S., die keine anderen Funktionskonstanten als g, f_l^m enthält und in der die Individuen $a_1, \ldots, a_n$ aus N (und keine anderen) vorkommen, die $\{g, f_l^m, a_1, \ldots, a_n\}$ durch $g', (f_l^m)'$, und diejenigen (eindeutig bestimmten) N_i, in welchen die a_i enthalten sind, so entsteht dadurch eine in N' richtige

[27] N soll als Menge der natürlichen Zahlen angenommen werden.

$$
\begin{aligned}
(x)G(x,x) \,\&\, & (x)(y)(z)\{G(x,y) \to [G(x,z) \to G(y,z)]\} \,\&\\
& (x)(y)(z)\{G(x,y) \to [G(z,x) \to G(z,y)]\} \,\&\\
& (x)(y)\{G(x,y) \to [F_1^1(x) \to F_1^1(y)]\} \,\&\\
& (x)(y)\{G(x,y) \to [F_2^1(x) \to F_2^1(y)]\} \,\&\\
& \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
& (x)(y)(z)\{G(x,y) \to [F_1^2(x,z) \to F_1^2(y,z)]\} \,\&\\
& (x)(y)(z)\{G(x,y) \to [F_1^2(z,x) \to F_1^2(z,y)]\} \,\&\\
& \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

(We will have similar expressions for all F_l^m.)

Let this entire expression be denoted by K'. Further, let A' be the expression that we obtain from A when we replace the identity sign everywhere by G. The formula $K' \to A'$ no longer contains the sign $=$. Hence either it is provable or its negation is satisfiable (this already holds, after all, for the logical axiom system in the restricted sense).

If (case 1) $K' \to A'$ is provable, then clearly so is A. For we need merely put the sign $=$ for G in $K' \to A'$ (then K' would go into K, A' into A). Since K is an immediate consequence of Axioms 7 and 8, and $K \to A$ is, by the substitution rule, provable, *in this case* A is provable.

If (case 2) the negation of $K' \to A'$, that is, $K' \,\&\, \overline{A'}$, is satisfiable, then so is $\overline{A}$, as we shall now prove. The function system satisfying $K' \,\&\, \overline{A'}$ will be denoted by (g, f_l^m). The expression K' being what it is, g clearly is symmetric, reflexive and transitive. Hence g partitions the domain[27] N of (g, f_l^m) into (at most denumerably many) classes, $N_1, N_2, \ldots, N_k, \ldots$. These classes are to form the elements of a new domain, N', and, in this domain, functions g', $(f_l^m)'$ are to be defined through the stipulation: $(f_l^m)'(N_{i_1}, \ldots, N_{i_m})$ is to hold if and only if in the former domain there are elements, namely $a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}$, such that $a_{i_k} \in N_{i_k}$ and $f_l^m(a_{i_1}, \ldots, a_{i_m})$ holds. Then obviously we have the following theorems:

(1) In N', g' is the identity, that is, $g'(N_i, N_k)$ holds if and only if N_i and N_k are the same class.

(2) If, in any applied formula i. t. r. s. that is correct (false) in N, that contains no functional constants other than g, f_l^m, and in which there occur the individuals $a_1, \ldots, a_n$ of N (and no others), we replace the $\{g, f_l^m, a_1, \ldots, a_n\}$ by g', $(f_l^m)'$, and the (uniquely determined) N_i in which the a_i are contained, then we obtain an applied formula that is correct (false) in N'. The statement holds by definition for sentences of the form $f_l^m(a_i, \ldots, a_m)$. But every applied formula that we need consider is

[27] N is to be taken as the set of natural numbers.

(bezw. falsche) Zählaussage. Die Behauptung gilt nach Definition für Aussagen der Form $f_l^m(a_1, \ldots, a_m)$. Aus solchen (und eventuell noch konstanten Aussagen) baut sich aber jede in Betracht kommende Zählaussage mit Hilfe von $\overline{}$, $\vee$, $(\quad)$ auf und man sieht leicht, daß diese Operationen die zu beweisende Eigenschaft nicht zerstören. Nun gilt die Zählaussage $\underline{\overline{A'}}$ in N,[28] folglich auch die entsprechende in N'. Da aber g in N' die Identität ist, so gilt $\underline{\overline{A}}$ in N,[29] $\overline{A}$ ist also erfüllbar und zwar in einem höchstens abzählbaren Denkbereich.

A ist also entweder beweisbar oder seine Negation erfüllbar, womit der Vollständigkeitssatz auch für das logische Axiomensystem i. w. S. bewiesen ist.

7. Beweis der Unabhängigkeit des logischen Axiomensystems

Jetzt soll die Frage der Unabhängigkeit und zwar für das logische Axiomensystem i. w. S. behandelt werden (für das i. e. S. folgt sie ja sofort daraus).

1.) Was die vier ersten (Aussagen) Axiome betrifft, so kann der Bernays'sche Beweis für die Unabhängigkeit der Aussageaxiome *allein* (H. A., I, §13) wörtlich wiederholt werden.[30] Man braucht nur die am angeführten Orte gegebenen arithmetischen Interpretationen auf die Formeln, welche Funktionsvariable und das =-Zeichen enthalten, auszudehnen durch die Festsetzung, daß die Klammerzeichen und die Individuenvariabeln weggelassen und in dem übrig bleibenden Formelteil die Funktionsvariabeln genau wie Aussagevariable behandelt werden sollen. (Für das =-Zeichen darf immer nur der Wert Null eingesetzt werden.) Für die Axiomensysteme, welche aus dem logischen i. w. S. durch Weglassung von Axiom 1, 3 oder 4 entstehen, gilt dann tatsächlich, daß 1.) die Axiome bei beliebiger Einsetzung den Wert 0 ergeben und 2.) diese Eigenschaft durch die Schlußregeln erhalten bleibt, während das jeweils weggelassene Axiom diese Eigenschaft nicht hat. Bei Axiom 2 ergibt sich die Schwierigkeit, daß bei beliebiger Einsetzung *nicht* alle Axiome (außer 2) den Wert Null ergeben (die Ausnahme findet für Axiome 5 und 8 bei der Einsetzung $F = 2$ statt). Doch läßt sich diese Schwierigkeit durch die Festsetzung überwinden, daß

[28] Genauer gesagt, es gilt in N die Aussaage, welche aus $\overline{A'}$ durch Einsetzung von $\{g, f_l^m\}$ an Stelle von $\{G, F_l^m\}$ entsteht (bezeichnet mit $\underline{\overline{A'}}$).

[29] Auch hier hat man sich zunächst die Einsetzung in A vollzogen zu denken $\{(f_l^m)'$ an Stelle von $F_l^m\}$.

[30] Es ist ja von vorneherein evident, daß keines der Aussagenaxiome durch Hinzunahme der Funktionsaxiome beweisbar werden kann.

built from such propositions (and perhaps also constant propositions) by means of &, $\vee$, (x), and we readily see that these operations do not destroy the property that has to be proved. Now, the applied formula $\overline{\underline{A'}}$ holds in N;[28] hence so does the corresponding one in N'. But, since g is the identity in N, $\overline{\underline{A}}$ holds in N.[29] Hence $\overline{A}$ is satisfiable, and it is so in an at most denumerable domain.

Thus either A is provable or its negation is satisfiable, and thereby the completeness theorem is proved for the logical axiom system i. t. e. s., too.

7. Independence proof for the logical axiom system

We shall now treat the question of independence, dealing with the logical axiom system i. t. e. s. (when its independence is established, that of the system i. t. r. s. immediately follows).

(1) As far as the first four (propositional) axioms are concerned, Bernays' independence proof for the propositional axioms *alone* (H. A., I, §13) can be repeated word for word.[30] The arithmetical interpretations given at the cited place to the formulas containing functional variables and the sign $=$ need merely be extended by the stipulation that parentheses and individual variables are to be omitted and that, in what remains of the formula, functional variables are to be treated exactly like propositional variables. (For the sign $=$, only the value 0 may be substituted.) For the axiom systems that result from the axiom system i. t. e. s. when Axiom 1, 3, or 4 is omitted, it is then a fact that (1) for any substitution the axioms yield the value 0 and (2) this property is preserved by the rules of inference, while the omitted axiom does not have this property. In the case of Axiom 2 there is the difficulty that, with an arbitrary substitution, *not* all axioms (other than 2) yield the value 0 (the exception occurs for Axioms 5 and 8 with the substitution $F = 2$). We can, however, overcome this difficulty by stipulating that only the values 0 and 1 may be substituted for the functional variables. Then the axioms yield the value 0 for any (allowed) substitution, and this property is preserved when the inference rules

[28] More precisely, the proposition (denoted by $\underline{\overline{A'}}$) that results from $\overline{A'}$ when $\{g, f_l^m\}$ is substituted for $\{G, F_l^m\}$ holds in N.

[29] Here, too, we must first imagine that, in A, $(f_l^m)'$ has been put for F_l^m.

[30] It is immediately evident that no propositional axiom can become provable when the functional axioms are added.

für Funktionsvariable nur die Werte 0 und 1 eingesetzt werden dürfen. Dann ergeben die Axiome bei beliebiger (erlaubter) Einsetzung den Wert 0 und diese Eigenschaft bleibt bei Anwendung der Schlußregeln erhalten.[31]

2.) Auch die Unabhängigkeit der Axiome 5 und 6 sowie der Schlußregeln läßt sich durch arithmetische Interpretationen beweisen. Allen diesen ist Folgendes gemeinsam:

1.) Die sowohl für Funktions- und Aussagevariable zugelassenen Werte sind $0, 1$.

2.) Die Operationen $\overline{}$ und $\vee$ haben die gewöhnliche Wirkung, d. h. $\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 0$, $\quad i \vee k \equiv i \times k \pmod 2$.

3.) Für das $=$ Zeichen darf nur der Wert 0 eingesetzt werden.

4.) Die Wirkung von (x), (Ex) hängt nicht ab von der Bezeichnung der darin eingesetzten Variabeln (dies erleidet nur in (d) eine Ausnahme).

Der Unabhängigkeitsbeweis erfolgt dann immer in der gleichen Weise dadurch, daß gezeigt wird: 1.) Die Axiome mit Ausnahme eventuell desjenigen, dessen Unabhängigkeit bewiesen werden soll, ergeben bei beliebiger Einsetzung den Wert 0. 2.) Diese Eigenschaft überträgt sich durch die Schlußregeln (mit Ausnahme eventuell derjenigen, deren Unabhängigkeit bewiesen werden soll). 3.) Es gibt eine im vollständigen Axiomensystem beweisbare Formel, welche diese Eigenschaft nicht hat.

a) Unabhängigkeit von Axiom 5: $(x)0 = (x)1 = 0$, Axiom 5 ergibt für $F = 1$ den Wert 1.

b) Unabhängigkeit von Axiom 6: $(x)1 = (x)0 = 1$ in Ausdrücken, welche *nicht* die Gestalt $(x)A(x)$ haben, d. h. in denen die zuletzt angewandte Operation *nicht* ( ) ist. Formeln der Gestalt $(x)A(x)$ soll bei beliebiger Einsetzung der Wert 0 zugeordnet werden. Die beweisbare Formel

$$A \vee (x)F(x) \to (x)[A \vee F(x)]$$

ergibt dann für $A = 0$, F beliebig, den Wert 1.

c) Unabhängigkeit von Schlußregel 3: $(x)0 = (x)1 = 1$. *Sämtliche* Axiome ergeben bei dieser Interpretation immer den Wert 0 und Anwendung von Regel 1, 2, 4 ändert daran nichts. Dagegen ergibt genau wie oben die beweisbare Formel

$$A \vee (x)F(x) \to (x)[A \vee F(x)]$$

[31]Daß dies auch bei Anwendung der Einsetzungsregel stimmt, ergibt sich daraus, daß auch jeder Ausdruck, der für eine Funktionsvariable eingesetzt werden kann, bei beliebiger Einsetzung nur die Werte 0 oder 1 annimmt. Denn enthält er ein $\vee$-Zeichen, dann folgt das daraus, daß das Resultat der $\vee$-Verknüpfung (für die betreffende Interpretation—H. A., I, §13) bei beliebiger Wertbestimmung der Glieder nur 0 oder 1 ergeben kann. Enthält er aber kein $\vee$-Zeichen, dann muß er die Gestalt $F, \overline{F}, \overline{\overline{F}}, \ldots$ usw. haben und für diese Ausdrücke ist es erst recht klar, daß sie nur die Werte 0 und 1 annehmen können.

are used.[31]

(2) The independence of Axioms 5 and 6, as well as of the inference rules, can also be proved by means of arithmetical interpretations. All these have the following in common:

(α) The admitted values for functional and propositional variables are 0 and 1;

(β) The operations $\overline{\quad}$ and $\vee$ have the customary effect, that is, $\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 0$, $i \vee k \equiv i \times k \pmod 2$;

(γ) For the sign $=$ only the value 0 may be substituted;

(δ) The effect of (x) and (Ex) does not depend on the variables occurring in them (this suffers an exception only in (d)).

The independence proof then always proceeds in the same way, namely, we show: (1) The axioms, with the possible exception of the one whose independence has to be proved, yield the value 0 for any substitution; (2) this property is carried over by the rules of inference (with the exception of the one whose independence is to be proved); (3) there is a formula, provable in the complete axiom system, that does not have this property.

(a) Independence of Axiom 5: $(x)0 = (x)1 = 0$; for $F = 1$, Axiom 5 yields the value 1.

(b) Independence of Axiom 6: $(x)1 = (x)0 = 1$ in expressions that are *not* of the form $(x)A(x)$, that is, in those in which the last operation performed is *not* (x). Formulas of the form $(x)A(x)$ are, for an arbitrary substitution, to be assigned the value 0. Then the provable formula

$$A \vee (x)F(x) \rightarrow (x)[A \vee F(x)]$$

yields the value 1 for $A = 0$ and arbitrary F.

(c) Independence of Rule of inference 3: $(x)0 = (x)1 = 0$. For this interpretation *all* the axioms yield the value 0, and an application of Rule 1, 2 or 4 does not change this. But, exactly as above, the provable formula

$$A \vee (x)F(x) \rightarrow (x)[A \vee F(x)]$$

yields the value 1 for a certain substitution, hence cannot be proved without an application of Rule 3.

(d) Rule of inference 4 (renaming of variables) is, of course, indispensable only when we state the axioms with only *one definite* variable (as was

[31]That this is the case also when the substitution rule is used follows from the fact that every expression that can be substituted for a functional variable will, for any substitution, take only the value 0 or 1. For, if such an expression contains the sign $\vee$, this result follows from the fact that a disjunction (for the interpretation in question—H. A., I, §13) can only yield 0 or 1, whatever the values assigned to the terms may be. If, however, it does not contain the sign $\vee$, then it must have the form $F, \overline{F}, \overline{\overline{F}}, \ldots$, and for such an expression it is all the more clear that it can take on only the values 0 and 1.

für eine gewisse Einsetzung den Wert 1, sie kann also nicht ohne Anwendung von Regel 3 bewiesen werden.

d) Schlußregel 4 (Umbezeichnung der Variabeln) ist natürlich nur dann unentbehrlich, wenn man die Axiome nur *in einer bestimmten* Variabeln ausspricht (wie es oben für x geschehen ist). Im entgegengesetzten Fall müßte man unendlich viele Axiome aufstellen. Die jetzt zu gebende arithmetische Interpretation zeigt—über die Unabhängigkeit hinaus—daß Regel 4 nicht durch die schwächere ersetzt werden kann, daß nur die *freien* Variabeln umbezeichnet werden dürfen, $(x)0 = 0$, $(x)1 = 1$, dagegen für jede andere Variable z, $(z)0 = (z)1 = 0$. Schon die Formel $(x)(z)F(x, z) \rightarrow F(u, v)$ ergibt dann für $F = 1$ den Wert 1, ist also nicht ohne Hilfe von Regel 4 beweisbar und dies gilt auch für jede Formel, die daraus durch Umbezeichnen der Variabeln hervorgeht, so daß durch Weglassung von Regel 4 der Kalkül eine *wesentliche* Einbuße erleiden würde.

Daß Regel 1 und 2 nicht überflüssig sind, ist ja vollkommen trivial und die Unabhängigkeit von Axiomen 7 und 8 ergibt sich leicht daraus, daß 7 allein auch für die Allrelation, 8 allein auch für die leere Relation erfüllt ist, dagegen 7 für die leere Relation, 8 für die Allrelation (für einen Denkbereich von mindestens zwei Individuen) nicht erfüllt ist.

8. Erweiterung des Vollständigkeitssatzes auf unendliche Systeme von logischen Ausdrücken und axiomatische Anwendungen

Oben, Abschnitt 4 bis 6, wurde bewiesen, daß jeder logische Ausdruck entweder erfüllbar oder widerlegbar ist. Das gilt auch noch für jedes (höchstens abzählbare) System von logischen Ausdrücken.[32] Auch jedes solche System ist entweder erfüllbar oder widerlegbar. "Erfüllbar" soll dabei heißen: Es gibt in irgend einem Denkbereich ein System von Individuen, Funktionen und Sätzen, welche an Stelle der freien Individuenvariabeln, Funktions- und Aussagevariabeln entsprechend eingesetzt *sämtliche* Ausdrücke des Systems in wahre Sätze überführen. "Widerlegbar" soll ein System von logischen Ausdrücken heißen, wenn es ein *endliches* Teilsystem gibt, dessen logisches Produkt (&-Verknüpfung) widerlegbar ist. Der Beweis verläuft dem oben für einzelne Ausdrücke gegebenen vollkommen analog und soll deshalb nur kurz angedeutet werden. Man zeigt zunächst, daß man sich beim Beweise auf Systeme beschränken kann, in denen sämtliche Ausdrücke Normalausdrücke sind und weiter auf Systeme aus Normalausdrücken ersten Grades. Denn sei $A^1, A^2, \ldots$ irgend ein System von Normalausdrücken, die nicht sämtlich vom ersten Grad sind, dann bilde man das

[32]Diese Erweiterung ist besonders für axiomatische Anwendungen wichtig.

done above with x). Otherwise we would have to state infinitely many axioms. The arithmetical interpretation to be given now shows, beyond independence, that Rule 4 cannot be replaced by the weaker rule allowing the renaming of only *free* variables: $(x)0 = 0$, $(x)1 = 1$; but, for any other variable z, $(z)0 = (z)1 = 0$. Then, for $F = 1$, already the formula $(x)(z)F(x,z) \to F(u,v)$ yields the value 1, hence is not provable except by means of Rule 4, and this is also true of every formula that results from this one when variables are renamed, so that, if Rule 4 were omitted, the calculus would suffer a *substantial* loss.

That Rules 1 and 2 are not superfluous is after all completely trivial, and the independence of Axioms 7 and 8 readily results from the fact that Axiom 7, taken by itself, is satisfied by the universal relation, and Axiom 8, taken by itself, by the empty relation, while it is not the case that Axiom 7 is satisfied by the empty relation or Axiom 8 by the universal relation (for a universal domain of at least two individuals).

8. Extension of the completeness theorem to infinite systems of logical expressions; axiomatic applications

Above, in Sections 4–6, it was proved that every logical expression is either satisfiable or refutable. This holds also for every (at most denumerable) system of logical expressions.[32] Such a system, too, is either satisfiable or refutable. 'Satisfiable' here is to mean the following: In some universal domain there exists a system of individuals, functions and propositions that, when properly put at the place of the free individual variables, the functional variables and the propositional variables, turn *all* expressions of the system into true sentences. A system of logical expressions is said to be refutable if there is a *finite* subsystem whose logical product (conjunction) is refutable. The proof is completely analogous to the one given above for single expressions and will therefore only be sketched briefly. We first show that, for the proof, we can restrict ourselves to systems in which all expressions are normal expressions and, further, to systems of normal expressions of degree 1. For let $A^1, A^2, \dots$ be any system of normal expressions that are not all of degree 1, and let us form the system $B^1, B^2, \dots$ by repeated application of the procedure of Section 4 to the corresponding expressions A^i.[33] If now the system (B^i) is satisfiable, then so is the system

[32] This extension is especially important for axiomatic applications.

[33] The B^i are then normal expressions of degree 1, but will in general contain a few more functional variables than the corresponding A^i.

System $B^1, B^2, \ldots$ usw. durch mehrmalige Anwendung des Verfahrens von Abschnitt 4 auf die entsprechenden Ausdrücke A^i.[33] Ist nun das System (B^i) erfüllbar, dann auch (A^i) und zwar durch dasselbe Funktionssystem,[34] da ja $B^i \rightarrow A^i$ gilt. Ist das System (B^i) widerlegbar, dann ist (nach Definition) $\overline{B^1 \,\&\, B^2 \,\&\, \ldots \,\&\, B^n}$ für ein bestimmtes n beweisbar. Durch entsprechende Einsetzung für die in den B^i neu hinzugekommenen Variabeln folgt dann wie in Abschnitt 4, daß auch $\overline{A^1 \,\&\, A^2 \,\&\, \ldots \,\&\, A^n}$ beweisbar, d. h. das System (A^i) widerlegbar ist.

Sei jetzt $(P^1)A^1, (P^2)A^2, \ldots$ ein System von Normalausdrücken ersten Grades. Für ein solches kann man analog wie oben einen n-ten abgeleiteten Ausdruck definieren, was jetzt auseinandergesetzt werden soll. Die Leerstellen jedes A^i zerfallen in solche, die durch Allzeichen und solche, die durch E-Zeichen gebunden sind.[35] Das soll durch die Schreibweise $A^i(\ \ ;\ \ )$ angedeutet werden, wobei die Leerstellen vor dem Strichpunkt durch Allzeichen, die anderen durch E-Zeichen gebunden zu denken sind. Ferner sei bemerkt, daß im Folgenden die Zeichen z^i_l, y^i_l nicht einzelne Variable sondern k-Tupel von Variabeln bezeichnen, wobei das k sich aus dem Zusammenhang ergibt. Unter dem n-ten abgeleiteten Ausdruck des vorgelegten Systems soll der folgende verstanden werden:

$$\begin{aligned}(P_n)[&A^1(z^1_1; y^1_1) \,\&\, A^1(z^1_2; y^1_2) \,\&\, \ldots \,\&\, A^1(z^1_{n-1}; y^1_{n-1}) \,\&\, A^1(z^1_n; y^1_n)\\ &\&\, A^2(z^2_1; y^2_1) \,\&\, A^2(z^2_2; y^2_2) \,\&\, \ldots \,\&\, A^2(z^2_{n-1}; y^2_{n-1})\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\&\, A^{n-1}(z^{n-1}_1; y^{n-1}_1) \,\&\, A^{n-1}(z^{n-1}_2; y^{n-1}_2)\\ &\&\, A^n(z^n_1; y^n_1)].\end{aligned}$$

Der ganze obige Ausdruck soll mit $(P_n)T_n$ bezeichnet werden. Er baut sich in leicht ersichtlicher Weise aus der n-ten Ableitung von A^1, der $(n-1)$-Ableitung von A^2 usw. bis zur ersten Ableitung von A^n auf. Das Präfix (P_n) soll nur E-Zeichen enthalten und sämtliche Variable z, y binden. Die in den k-Tupeln z, y auftretenden Variabeln sollen sämtlich der Reihe $x_1, x_2, \ldots$ entnommen sein. Dabei sollen die Indizes der z nach folgender Regel bestimmt werden: Die in $z^1_1, z^2_1, \ldots, z^n_1$ vorkommenden Variabeln haben lauter Einsen als Indizes. z^l_{i+1} soll das auf z^l_i nächstfolgende k-Tupel sein (k bestimmt sich natürlich durch das betreffenden A^l). Ferner

[33]Die B^i sind dann Normalausdrücke ersten Grades, enthalten i. A. aber einige Funktionsvariable mehr als die entsprechenden A^i.

[34]Natürlich mit Weglassung gewisser in den B^i nicht aber in den entsprechenden A^i vorkommenden Funktionen.

[35]Ausserdem können noch ungebundene Leerstellen vorkommen, doch stören diese die ganze folgende Betrachtung nicht, wenn man nur dafür sorgt, daß sie mit Variabeln ausgefüllt sind, welche von den x_i sämtlich verschieden sind.

(A^i), and indeed by the same systems of functions,[34] since $B^i \to A^i$ holds. If the system (B^i) is refutable, then, for a certain n, $\overline{B^1 \mathbin{\&} B^2 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} B^n}$ is provable (by definition). By proper substitution for the variables that now occur in the B^i, it follows, as in Section 4, that $\overline{A^1 \mathbin{\&} A^2 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} A^n}$, too, is provable; that is, the system (A^i) is refutable.

Now let $(P^1)A^1, (P^2)A^2, \ldots$ be a system of normal expressions of degree 1. For such a system we can, in a way similar to the one followed above, define an nth derived expression, as will now be explained. The argument places of each A^i divide into those that are bound by universal quantifiers and those that are bound by existential quantifiers.[35] This will be indicated by the notation $A^i(\ \ ;\ \ )$, where the argument places before the semicolon are to be considered bound by universal quantifiers and the others by existential quantifiers. Furthermore, let us remark that, in what follows, the signs z_l^i, y_l^i do not denote single variables, but k-tuples of variables, where k is determined by the context. By the nth derived expression of the system adopted, we are to understand the following expression:

$$
\begin{aligned}
(P_n)[&A^1(z_1^1; y_1^1) \mathbin{\&} A^1(z_2^1; y_2^1) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} A^1(z_{n-1}^1; y_{n-1}^1) \mathbin{\&} A^1(z_n^1; y_n^1)\\
&\mathbin{\&} A^2(z_1^2; y_1^2) \mathbin{\&} A^2(z_2^2; y_2^2) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} A^2(z_{n-1}^2; y_{n-1}^2)\\
&\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&\mathbin{\&} A^{n-1}(z_1^{n-1}; y_1^{n-1}) \mathbin{\&} A^{n-1}(z_2^{n-1}; y_2^{n-1})\\
&\mathbin{\&} A^n(z_1^n; y_1^n)].
\end{aligned}
$$

The entire expression above will be denoted by $(P_n)T_n$. It is constructed, as one can readily perceive, from the nth derived form of A^1, the $(n-1)$th derived form of A^2, and so on to the first derived form of A^n. The prefix (P_n) is to contain only existential quantifiers and to bind all the variables z and y. The variables occurring in the k-tuples z and y are all to be taken from the sequence $x_1, x_2, \ldots$, and the subscripts of the z's are to be determined by the following rule: The variables occurring in $z_1^1, z_1^2, \ldots, z_1^n$ have only 1's as subscripts; z_{i+1}^l is to be the k-tuple immediately succeeding z_i^l (k is, of course, determined by the A^l in question). Further, the subscripts occurring in $y_i^1, y_{i-1}^2, \ldots, y_1^i$ are all to be different from one another. (In the schema above, these y's occupy precisely one of the diagonals that run from the upper right to the lower left.) Furthermore, they are also to be different from the subscripts occurring in the subformula that lies to the

[34]With the omission, of course, of certain functions that occur in the B^i, but not in the corresponding A^i.

[35]In addition there may still be free argument places; but that will not affect any of the considerations that follow, if one but sees to it that these argument places are occupied by variables all of which differ from the x_i.

sollen die in $y_i^1, y_{i-1}^2, \ldots, y_1^i$ (diese erfüllen in dem obigen Schema gerade eine der Diagonalen von rechts oben nach links unten) vorkommenden Indizes sämtlich untereinander verschieden sein. Ferner sollen sie auch von den im links oberhalb der betreffenden Diagonale stehenden Formelteil vorkommenden Indizes verschieden sein. Um diese Bestimmung eindeutig zu machen braucht man nur noch festzusetzen, daß es von den in Betracht kommenden die mit kleinster Summe sein sollen. Wie oben zeigt man dann, daß für jedes n

$$[(P^1)A^1 \,\&\, (P^2)A^2 \,\&\, \ldots \,\&\, (P^n)A^n] \rightarrow (P_n)T_n$$

beweisbar ist. Ist nun eines der $(P_n)T_n$ widerlegbar, dann ist auch

$$(P^1)A^1 \,\&\, (P^2)A^2 \,\&\, \ldots \,\&\, (P^n)A^n,$$

d. h. ein endliches Teilsystem des vorgelegten Systems, widerlegbar. Sind dagegen alle $(P_n)T_n$ (resp. die zugeordneten Aussageformeln) erfüllbar, dann ergibt sich wie oben, daß auch das ganze System von Ausdrücken $(P^i)A^i$ erfüllbar ist. Auch die Erweiterung auf Systeme, welche das $=$-Zeichen enthalten, ergibt sich genau wie oben.

Die Anwendung des Bisherigen auf Zählaxiomensysteme ergibt sich nun leicht. Um zu beweisen, daß jedes Zählaxiomensystem (es mag endlich oder unendlich sein) entweder ein Modell hat oder widerspruchsvoll ist, genügt es, dasjenige System von logischen Ausdrücken zu betrachten, welches aus dem Zählaxiomensystem entsteht, wenn man die Namen durch freie Variable und die Funktionskonstanten durch Funktionsvariable ersetzt (natürlich immer verschiedene durch verschiedene). Ist dann dieses System von logischen Ausdrücken erfüllbar, dann auch das Axiomensystem. Ist es widerlegbar, dann ist (nach Definition) schon das Produkt (Π) aus *endlich vielen* Ausdücken des Systems widerlegbar, also $\overline{\Pi}$ beweisbar. Also ist auch $\overline{\Pi}'$ (dieses soll durch Rückeinsetzung der Konstanten an Stelle der Variabeln aus $\overline{\Pi}$ entstehen) aus dem Axiomensystem deduzierbar (nach der Einsetzungsregel). Da aber natürlich auch Π' aus dem Axiomensystem deduzierbar ist (durch Anwendung der Formel $A \rightarrow (B \rightarrow A \,\&\, B)$), so ist in diesem Fall das Axiomensystem widerspruchsvoll. Es ergibt sich jetzt auch leicht, daß jede *richtige*, d. h. nicht durch Gegenbeispiele widerlegbare Folgerung aus einem Zählaxiomensystem mit endlich vielen formalen Schlüssen erreicht werden kann oder genauer: Jeder in einem Axiomensystem (As) sinnvolle Satz A ist entweder aus den Axiomen deduzierbar oder es gibt ein Modell für As $\&\, \overline{A}$. Das ergibt sich durch Betrachtung des Axiomensystems As $\&\, \overline{A}$, das ja entweder widerspruchsvoll oder realisierbar sein muß.

left and above the diagonal in question. In order to make this determination unique we need only specify that, of those that may be considered, we take those with the smallest sum. As above, we now show that, for every n,

$$[(P^1)A^1 \,\&\, (P^2)A^2 \,\&\, \ldots \,\&\, (P^n)A^n] \to (P_n)T_n$$

is provable. If now one of the $(P_n)T_n$ is refutable, then so is

$$(P^1)A^1 \,\&\, (P^2)A^2 \,\&\, \ldots \,\&\, (P^n)A^n;$$

that is, a finite subsystem of the system adopted is refutable. If, however, all $(P_n)T_n$ (or the associated propositional formulas) are satisfiable, then it turns out, as above, that the entire system of expressions $(P^i)A^i$ is satisfiable. The extension to systems that contain the sign $=$ is also carried out exactly as above.

It is now readily seen how what has been done so far carries over to applied first-order axiom systems. In order to prove that every applied first-order axiom system (whether finite or infinite) either has a model or is inconsistent, it suffices to consider the system of logical expressions that results from the applied axiom system when we replace the names by free variables and the functional constants by functional variables (always, of course, replacing different names or constants by different variables). Now, if this system of logical expressions is satisfiable, then so is the axiom system. If it is refutable, then (by definition) the product Π of *finitely many* expressions of the system is already refutable, hence $\overline{\Pi}$ is provable. Hence $\overline{\Pi}'$ (which we obtain from $\overline{\Pi}$ by substituting back the constants for the variables) is also derivable from the axiom system (by the substitution rule). But, since, of course, Π' is also derivable from the axiom system (by use of the formula $A \to [B \to (A \,\&\, B)]$), the axiom system is in that case inconsistent. It is now readily apparent, too, that every *correct* consequence, that is, one not refutable by counter-examples, can be reached from an applied first-order system of axioms by finitely many formal inferences, or, more precisely: For every proposition A that is meaningful in an axiom system (As), either A is derivable from the axioms or there is a model for As $\&\,\overline{A}$. We obtain this by considering the axiom system As $\&\,\overline{A}$, which, after all, must be either inconsistent or realizable.